מבוא לאלגברה לינארית, מועד א', תש"ף

מרצה: תמר בר-און.
מתרגלת: אלכסנדרה סימנובסקי.
משך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט.
עליכם לענות על כל השאלות. בכל שאלה יש להראות את החישובים הנצרכים ודרך הפתרון.

1. נתונה מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ x+(a-1)y+(a^2+1)z=a+10 \\ 2x+(4-a)y-2z=10 \end{cases}$$

(א) (15 נקודות) קבעו לאילו ערכי a יש למערכת: פתרון יחיד, אין פתרון, אינסוף פתרונות.

(ב) (5 נקודות) במקרה של אינסוף פתרונות, מצאו את הפתרון הכללי של המערכת.

i. נדרג את המערכת לצורה מדורגת (לא בהכרח קנונית) ונקבל:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & a-2 & a^2 & a+4 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a+2 \end{array}\right)$$

ניתן לבצע את הדירוג בלי פעולות של חלוקה בסקלר.
כעת, אם $a=2$ מקבלים בשורה השלישית שורת סתירה, ולכן אין פתרון. אם $a=-2$ מקבלים בשורה השלישית שורת אפסים, וכן בשום שורה אין סתירה, ולכן יש אינסוף פתרונות. לכל $a\neq\pm2$ יש איבר מוביל בכל עמודה ולכן יש פתרון יחיד.

ii. עבור $a=-2$ נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 6.5 \\ 0 & 1 & -1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

נציב $z=t$ ונקבל $y=0.25+t$ ו-$x=5.75-2t$. כלומר, הפתרון הכללי הוא
$$\begin{pmatrix} 6.5-2t \\ -0.5+t \\ t \end{pmatrix}.$$

2. תהיינה

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\-1&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&-3\\4&4\\2&0\end{pmatrix}$$

(א) (7 נקודות) חשבו את AB^t

(ב) (8 נקודות) קבעו האם AB^t הפיכה. במידה וכן, מצאו את ההופכית.

(ג) (5 נקודות) חשבו את $|AB^t|$.

i. $B^t=\begin{pmatrix}3&4&2\\-3&4&0\end{pmatrix}$. לכן $AB^t=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&4&2\\-3&4&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8&2\\-6&8&0\\-3&-4&-2\end{pmatrix}$

ii. ידוע ש$rank(AB^t)\le rank(A)$. כמו כן, $rank(A)\le 2$. לכן $rank(AB^t)\le 2$. המטריצה מגודל 3×3 ולכן אינה יכולה להיות הפיכה.

iii. המטריצה אינה הפיכה ולכן הדטרמיננטה שלה שווה 0ץ

3. תהי

$$A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&2&1\\6&0&-3\end{pmatrix}$$

(א) (10 נקודות) חשבו את הפולינום האופייני והערכים העצמיים של A.

(ב) (10 נקודות) קבעו האם A לכסינה. במידה וכן, מצאו P הפיכה וD אלכסונית כך ש$P^{-1}AP=D$.

i.

$$p_A=|xI-A|=\left|\begin{pmatrix}x-3&-1&1\\0&x-2&-1\\-6&0&x+3\end{pmatrix}\right|=(x-3)(x-2)(x+3)-6+6(x-2)=x(x+1)(x-3)$$

הע"ע של A הם $0,-1,3$

ii.

$$V_0=N\begin{pmatrix}3&1&-1\\0&2&1\\6&0&-3\end{pmatrix}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_{-1}=N\begin{pmatrix}-4&-1&1\\0&3&-1\\-6&0&2\end{pmatrix}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}\right\}$$

$$V_3 = N\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

הר"ג והר"א של כל ע"ע הוא 1. כלומר, סכום הריבויים האלגבריים שווה 3, וכן לכל ע"ע ריבוי אלגברי= ריבוי גיאומטרי, לכן המטרצה לכסינה.

iii. $$D = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & 3 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. תהי

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(א) (15 נקודות) מצאו בסיס ומימד למרחב השורות של A, מרחב העמודות של A, ומרחב האפס של A.

(ב) (5 נקודות) קבעו האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודות של A. הוכיחו את קביעתכם.

i. נדרג את A לצורה קנונית ונגיע למטריצה:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -0.5 \end{pmatrix}$$

לכן בסיס למרחב השורות הוא: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}\right\}$ והמימד הוא 3.

בסיס למרחב העמודות הוא העמודות שיש בהן איבר מוביל. אילו 3 העמודות הראשונות: $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ והמימד הוא 3.

בשביל למצוא את מרחב האפס נפתור את המערכת ההומוגנית. נציב t במשתנה האחרון. נקבל שבסיס למרחב האפס הוא הוקטור $\begin{pmatrix} -1.5 \\ 0 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$. המימד הוא 1.

ii. מרחב העמודות הוא תת מרחב ממימד 3 של $\mathbb{R}^3$, ולכן שווה ל$\mathbb{R}^3$. כלומר, הוא מכיל כל וקטור עם 3 רכיבים. לכן, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודות.

5. יהיו $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(א) (10 נקודות) חשבו $\pi_w(v)$.

(ב) (10 נקודות) חשבו את הזווית שבין הוקטורים: $w, v - \pi_w(v)$.

i.

$$\pi_w(v) = \frac{\langle v, w \rangle}{||w||^2} w = \frac{5}{25} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix}$$

ii. ידוע ש$w \perp v - \pi_w(v)$, לכן הזווית היא 90°.

נוסחאות עזר:

1. חישוב דטרמיננטה לפי מינורים: פיתוח לפי שורה i מחושב $|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} A_{i,j} |M_{i,j}|$

2. הזווית θ בין וקטורים u, v מוגדרת ע"י $\cos\theta = \frac{\langle v,u \rangle}{\|v\| \cdot \|u\|}$ (כאשר $\theta \in [0, \pi]$)

3. הטלה של וקטור v על w (ניתן גם לומר על: $W = \operatorname{span}\{w\}$) הוא $\pi_W(v) = \pi_w(v) = \frac{\langle v,w \rangle}{\|w\|^2} w$.