<u>88-113.תרגיל 12:</u>

שאלה 1: תהי $A=\begin{pmatrix} 0 & 14 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 13 & 4 \end{pmatrix}$. מצא את צורת ג'ורדן J של A ומטריצה הפיכה P כך ש-
$P^{-1}AP=J$.

3.3 תרגיל. יהא $V=\mathbb{C}^3$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית. יהא $B=\{(i,i,i),(i,i,0),(i,0,0)\}$.
א. מצא בסיס דואלי $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ עבור V^*.
ב. מצא וקטור $v_0\in V$ כך ש $\varphi_1(v)=\langle v,v_0\rangle$ לכל $v\in V$.

3.4 תרגיל. נתון כי $B=\{1+2x,\ 2+3x\}$ הוא בסיס עבור $\mathbb{R}_1[x]$. מצא את הבסיס הדואלי $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ל B במפורש, כלומר חשב במפורש את $\varphi_1(a+bx)$ ואת $\varphi_2(a+bx)$.

3.7 תרגיל!. יהא V מרחב וקטורי עם בסיסים $E=\{e_1,\ldots,e_n\},F=\{f_1,\ldots,f_n\}$, ותהא $P=(p_{ij})_{n\times n}$ מטריצת המעבר המקיימת $P[v]_E=[v]_F$ לכל $v\in V$, כלומר $P=[I]_F^E$.
א. הוכח: לכל $j=1,\ldots,n$, $e_j=p_{1j}f_1+\ldots+p_{nj}f_n$. [רמז: הצג את הזהות לפי בסיס F]
ב. יהא $F^*=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ הבסיס הדואלי ל F. הראה שלכל i,j: $p_{ij}=\varphi_i(e_j)$. [רמז: (א)]

3.9 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס $B=\{v_1,\ldots,v_n\}$ ובסיס סטנדרטי S, ויהא $B^*=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ הבסיס הדואלי המתאים. תהא P מטריצת המעבר המקיימת $P[v]_S=[v]_B$ לכל $v\in V$, כלומר $P=[I]_B^S$.
הוכח: לכל i ולכל $v\in V$, $R_i(P)[v]_S=\varphi_i(v)$. לכן אפשר למצוא את $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ ע"י כפל במטריצת המעבר P. (תזכורת: את המטריצה P קל לחשב: כותבים את הוקטורים v_i בעמודות, והופכים את המטריצה שהתקבלה.)

3.12 תרגיל. בהמשך לתרגיל 3.9, הצג את הפונקציונל הלינארי $\varphi(x,y,z)=x-y-z$ כצירוף לינארי של אברי B^*.

3.13 תרגיל. יהא $\varphi\in(\mathbb{R}^2)^*$ כך ש $\varphi(3,4)=5$ ו $\varphi(5,6)=7$. חשב את $\varphi(10,5)$:
א. ע"י הצגת $(10,5)$ כצירוף לינארי של $(3,4),(5,6)$.
ב. ע"י מציאת φ. [רמז: אפשר להיעזר בתרגיל קודם למציאות φ]