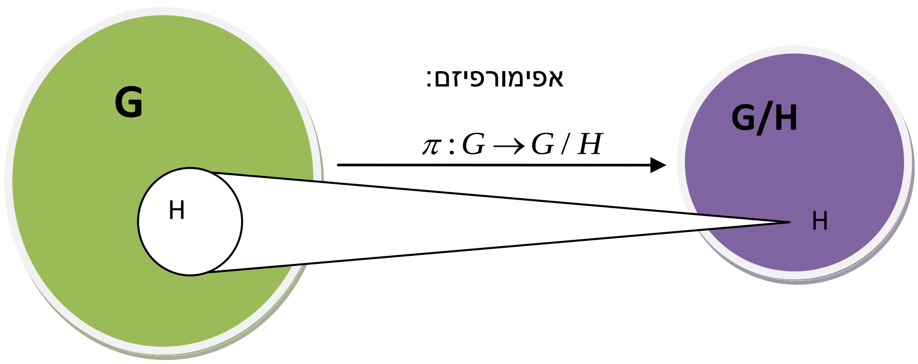
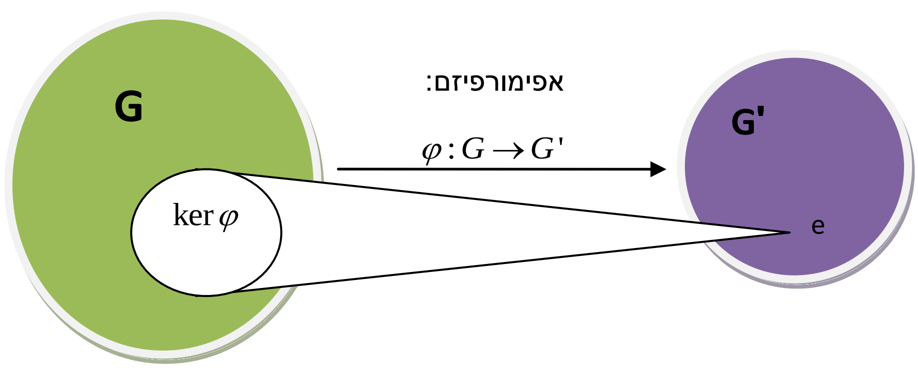
<u>תרגול 8:</u> **משפטי האיזומורפיזם (המשך)**

בתרגול הקודם ראינו ש:



זה אותו דבר כמו:



<u>במילים:</u> כל תמונה היא מנה, וכל מנה היא תמונה.

משפט ההתאמה (משפט איזו' 4):

יהי $\varphi : G \to H$ אפימורפיזם. נסמן $K := Ker\varphi$.

קיימת התאמה חח"ע (פונקציה חח"ע ועל) בין התת-חבורות של H לבין התת-חבורות של G המכילות את הגרעין. התאמה זאת שומרת על יחס סדר הכלה ממש, כלומר $K \le H_1 < H_2 \le G$ אם ורק אם $\varphi(H_1) < \varphi(H_2) \le H$.

קיימת התאמה חח"ע בין התח"נ של H לבין התח"נ של G, וגם כאן נשמר יחס סדר ההכלה.

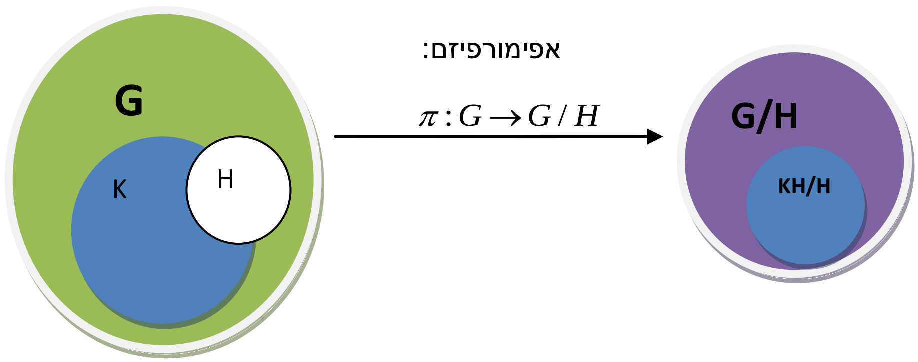
דוגמא:

נראה שוב שכל הת"ח של $\mathbb{Z}_n$ הן מהצורה $m\mathbb{Z}_n$ כאשר m|n. $\mathbb{Z}_n$ היא תמונה אפימורפית של $\mathbb{Z}$ ע"י ההומ' $\varphi(x) = x(\bmod n)$. הגרעין הוא $n\mathbb{Z}$.

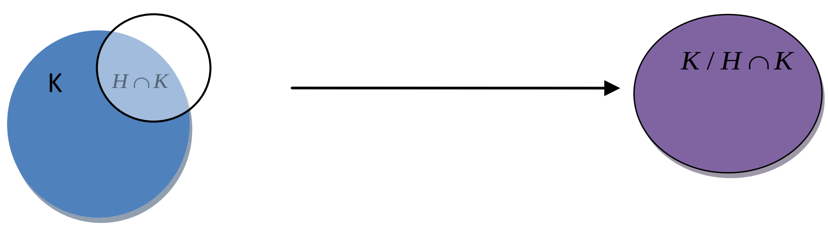
לכן לפי משפט ההתאמה, יש התאמה חח"ע בין הת"ח של $\mathbb{Z}$ המכילות את $n\mathbb{Z}$ לבין הת"ח של $\mathbb{Z}_n$. אנחנו כבר מכירים את כל הת"ח של $\mathbb{Z}$, ואם ת"ח כזאת מכילה את $n\mathbb{Z}$ אזי בהכרח היא מהצורה $m\mathbb{Z}$ כאשר m|n, ויש בדיוק אחת כזאת לכל מחלק.

משפט איזומורפיזם 2: תהי G חבורה $N \lhd G, H \le G$ אז:

1. $H \bigcap N \lhd H$
2. $H / H \bigcap N \cong HN / N$



אותו דבר כמו:



תרגיל: תהי G חבורה סופית ויהיו $N,M \triangleleft G$, $H \le G$ נניח כי $H \bigcap M = H \bigcap N = \{e\}$.

הוכח כי: $HM/M \cong HN/N$

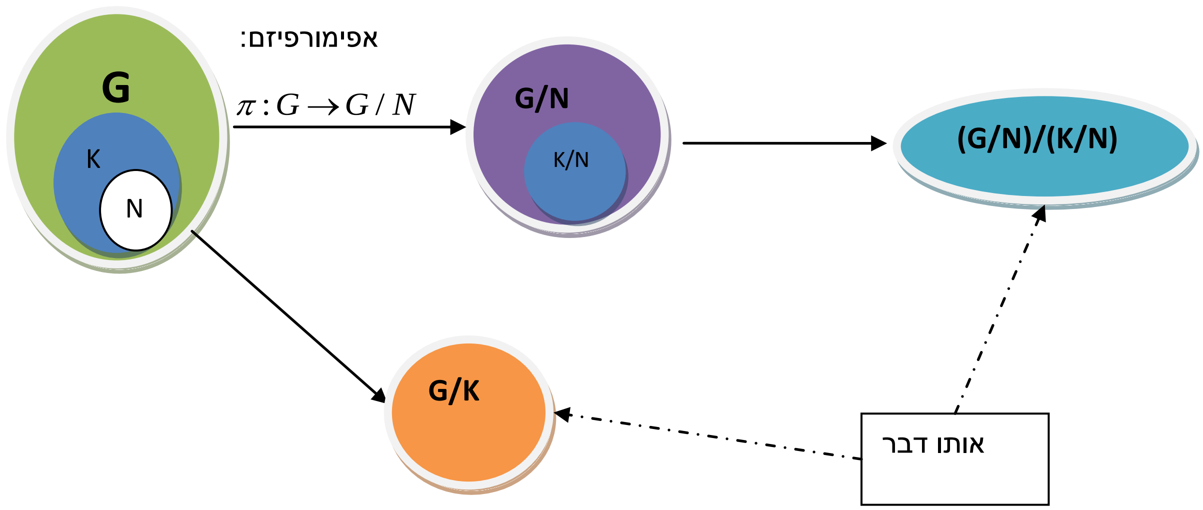
הוכחה: $M,N \triangleleft G$ לכן $HM, HN \le G$ (הוכחה תרגיל בית)לפי משפט האיזומורפיזם 2 נקבל:

$HM/M \cong H/H \bigcap M = H/\{e\} = H$ ומסיבות סימטריה נקבל: $HN/N \cong H$ ולכן מטרנזיטיביות האיזומורפיזם

נקבל $HN/N \cong HM/M$ □

<u>משפט איזומורפיזם 3 (משפט הצמצום):</u>

תהיינה G חבורה $N \triangleleft K \triangleleft G$ וגם $N \triangleleft G$, אזי $K/N \triangleleft G/N$ ומתקיים $G/K \cong \frac{G/N}{K/N}$.



<u>דוגמא:</u>

נראה (שוב, אך הפעם בעזרת איזו' 3) ש $\mathbb{Z}_6 / 3\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_3$:

נסתכל על השרשרת של תח"נ: $6\mathbb{Z} \triangleleft 3\mathbb{Z} \triangleleft \mathbb{Z}$. לפי משפט איזו 3 נקבל:

$$\mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})/(3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_6/3\mathbb{Z}_6$$

(למעשה האיזומורפיזם הזה ברור כי יש רק חבורה אחת מסדר 3).

האיזומורפיזם הכי ימני נובע מכך ש: $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_6$ לפי איזו' 1, וגם לפי איזו 1 ניתן להראות את $3\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong 3\mathbb{Z}_6$ (בדקו זאת!). **שימו לב:** צריך להזהר כאן, כיוון שזה לא תמיד נכון שמתקיים $G/H \cong K/L$ כאשר $G \cong K \wedge H \cong L$ (מצאו דוגמא נגדית). מותר לעשות זאת כאן כיוון שאנחנו משתמשים באותה העתקה $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_6$ המוגדרת ע"י $\pi(x) = x(\bmod 6)$.

<u>חבורות סימטריה</u>

נרצה להראות בצורה מלאה מהן כל מחלקות הצמידות של S_n עבור n נתון. לכן נבצע חזרה קלה על התכונות של S_n ונוכיח תכונות חדשות.

<u>תזכורת:</u>

<u>חוקי כתיבה:</u> כל תמורה כזאת אפשר לכתוב כפירוק למחזורים זרים. נסביר איך עושים זאת בעזרת דוגמאות:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

הסבר: מתחילים לקרוא את המחזור משמאל לימין:1 הולך ל2, 2 הולך ל3 , 3 הולך ל4 ו4 הולך ל1(באופן מחזורי).

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$

הסבר: מתחילים משמאל לימין: 2 הולך ל3 ו3 ל2 לכן הם במחזור אחד, 4 הולך ל6 ו6 הולך 5 ו5 הולך 4. את 1 אנו לא מוסיפים כי 1 הולך לעצמו.

<u>הערה:</u> שימו לב שניתן "לסובב" מחזור: כלומר $(123) = (231) = (312)$.

<u>תרגיל בית:</u> כמה דרכים שונות יש לכתוב אותו מחזור?

<u>משפט:</u> כל תמורה ב S_n אפשר לפרק למכפלת מחזורים זרים. פירוק זה יחיד עד כדי סדר המחזורים, ו"סיבוב" האיברים בכל מחזור.

<u>הערה:</u> איך מוצאים את ההפכי של מחזור? פשוט "הופכים" את המחזור:

$(1\ \ 2\ \ 3)^{-1} = (3\ \ 2\ \ 1)$.

<u>תרגיל (בקומבינטוריקה):</u> כמה מחזורים שונים באורך k יש ב S_n?

<u>תשובה:</u> כמספר הדרכים לבחור k מתוך n אנשים ולהושיבם במעגל. סה"כ: $\binom{n}{k}(k-1)!$.

<u>טענה:</u> הסדר של מחזור (כאיבר בחבורה) הוא אורכו, כלומר מס' האיברים שבמחזור.

במילים אחרות: מחזור באורך k הוא מסדר k. לדוגמא (3 4) מחזור מסדר 2 המכונה **חילוף**. מדוע הטענה הנ"ל נכונה? נראה בעזרת דוגמא שקל להכלילה: $[(12...k)^k](i) = (i+k) \pmod k$, כלומר

$$(12...k)(1)=2$$
$$(12...k)(2)=3 \Rightarrow (12...k)^2(1)=3$$
$$...$$
$$(12...k)(k-1)=k \Rightarrow (12...k)^{k-1}(1)=k$$
$$(12...k)(k)=1=(k+1)\ (\bmod k) \Rightarrow (12...k)^k(1)=1$$

<u>טענה:</u> איך מוצאים את הסדר של תמורה? תחילה מפרקים למחזורים **זרים**: $\pi=\sigma_1\cdots\sigma_k$ אזי $o(\pi)=lcm(o(\sigma_1),...,o(\sigma_k))$.

<u>הוכחה:</u> נשאיר זאת כתרגיל עם הדרכה:

1. הראו שאם $a,b\in G$ בחבורה כלשהיא מתחלפים ($ab=ba$) אזי $o(ab)\,|\,lcm(o(a),o(b))$.
2. מצאו מצב כנ"ל בו $o(ab)<lcm(o(a),o(b))$.
3. הראו שאם $a,b\in G$ מתחלפים וגם $<a>\cap<b>=\{e\}$ אזי $o(ab)=lcm(o(a),o(b))$.
4. כעת הסיקו את הטענה מהנ"ל.

<u>דוגמא:</u> $o((123)(45))=lcm(o((123)),o((45)))=lcm(3,2)=6$. **שימו לב:** אם המחזורים אינם זרים הטענה **אינה נכונה**. $o((123)(34))=o((1234))=4$. אם נתונה לכם מכפלה של מחזורים שאינם זרים, פשוט פרקו אותה למכפלת מחזורים זרים וחשבו את הסדר.

<u>הערה</u>: ניתן גם לכתוב תמורה בכתיב פונקציות:

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&3&2&6&4&5\end{pmatrix}$$

$$\pi(4)=6\quad \pi(2)=3\quad \pi(1)=1$$

<u>משפט:</u> כל תמורה ב- S_n אפשר להציג כמכפלה של חילופים למשל:

$$(a_1\,a_2\quad a_3\quad \dots\quad a_k)=(a_1\quad a_k)(a_1\quad a_{k-1})\cdots(a_1\quad a_2)$$

(בתמורה כללית פשוט מפרקים למחזורים זרים, ואז מפרקים כל מחזור זר לחילופים.)

<u>דוגמא:</u> $(1\quad 5\quad 4\quad 3\quad 2)=(1\quad 2)(1\quad 3)(1\quad 4)(1\quad 5)$

<u>מסקנה:</u> קבוצת החילופים ב S_n יוצרת את S_n.