הרצאה 7

משפט

יהיו $g:A\to B, f:B\to C$ פונקציות, אז $f\circ g:A\to C$.

א. אם f ו g חח"ע, אז $f\circ g$ חח"ע.

ב. אם f ו g על, אז $f\circ g$ על.

הוכחה

א. יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש $(f\circ g)(x_1)=(f\circ g)(x_2)$ על פי הגדרת ההרכבה $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ מכיוון ש f חח"ע נקבל ש $g(x_1)=g(x_2)$ מכיוון ש g חח"ע נקבל ש $x_1=x_2$.

ב. יהי $c\in C$ מכיוון ש f פונקציה על קיים $b\in B$ כך ש $f(b)=c$ ומכיוון ש g פונקציה על קיים $a\in A$ כך ש $g(a)=b$. $(f\circ g)(a)=f(g(a))=f(b)=c$.

מסקנה

אם $g:A\to B, f:B\to C$ פונקציות חח"ע ועל אז $f\circ g:A\to C$ גם חח"ע ועל.

הערה

ההפך לא בהכרח נכון.

למשל: $A=\{1,2\}, B=\{3,4,5\}, C=\{6,7\}$

$g:A\to B$ מוגדר ע"י $g(1)=3, g(2)=4$. $f:B\to C$ מוגדר ע"י $f(3)=6, f(4)=f(5)=7$.

נקבל ש $f\circ g:A\to C$ היא פונקציה חח"ע ועל מכיוון שהיא מוגדרת ע"י

$$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=6,(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(4)=7$$

משפט

אם $g:A\to B, f:B\to C$ הן פונקציות, אז:

א. אם $f\circ g$ היא חח"ע, אז g חח"ע.

ב. אם $f\circ g$ היא על, אז f היא על.

הוכחה

א. יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש $g(x_1)=g(x_2)$ מכיוון ש f היא פונקציה אז $f(g(x_1))=f(g(x_2))$ ועל פי הגדרת ההרכבה נקבל ש $(f\circ g)(x_1)=f(g(x_1))=f(g(x_2))=(f\circ g)(x_2)$ ומכיוון ש $f\circ g$ היא פונקציה חח"ע אז $x_1=x_2$.

ב. יהי $c\in C$ מכיוון ש $f\circ g$ היא על אז קיים $a\in A$ כך ש $(f\circ g)(a)=c$ ועל פי הגדרת ההרכבה $f(g(a))=c$ שימו לב: $g(a)\in B$ ולכן עבור $c\in C$ כלשהו קיים $g(a)=b\in B$ כך ש $f(b)=c$.

הגדרה- פונקצית הזהות

פונקציה $I_X:X\to X$ נקראת פונקצית הזהות אם לכל $a\in X$ $I_X(a)=a$.

משפט

אם $f:A\to B$ פונקציה אזי $I_B\circ f=f$ ו $f\circ I_A=f$.

הוכחה

נוכיח תחילה ש $I_B\circ f=f$.

נראה שהתחום והטווח של שתי הפונקציות זהה. $f:A\to B$, $I_B:B\to B$ על פי הגדרת ההרכבה $I_B\circ f:A\to B$.

יהי $a\in A$ אז $(I_B\circ f)(a)=I_B\left(f(a)\right)=f(a)$.

באותו אופן ניתן להראות ש $f\circ I_A=f$.

הגדרה

תהיינה A,B קבוצות ותהיי $f:A\to B$ פונקציה. הפונקציה f הפיכה אם קיימת פונקציה $g:B\to A$ כך ש $f\circ g=I_B\wedge g\circ f=I_A$. הפונקציה g תקרא הפונקציה ההופכית של f ותסומן ע"י f^{-1}.

משפט

תהיי $f:A\to B$ פונקציה הפיכה. הפונקציה ההפיכה של f יחידה.

הוכחה

נניח שהפונקציות $g:B\to A,h:B\to A$ הן ההופכיות של f. יהי $b\in B$ אז:

$$g(b)=I_A\left(g(b)\right)=(h\circ f)\left(g(b)\right)=h\Big(f\left(g(b)\right)\Big)=h\left(f\circ g(b)\right)=h\left(I_B(b)\right)=h(b).$$

משפט

תהיי $f:A\to B$. הפונקציה f הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל.

הוכחה

$\Leftarrow$

נתון ש f הפיכה ולכן קיימת פונקציה $g:B\to A$ כך ש $g\circ f=I_A\wedge f\circ g=I_B$.

מכיוון ש $g\circ f=I_A$ נקבל ש $g\circ f$ חח"ע וממשפט קודם f חח"ע.

מכיוון ש $f\circ g=I_B$ נקבל ש $f\circ g$ על וממשפט קודם f על.

$\Rightarrow$

נתון ש f חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $g:B\to A$. יהי $b\in B$ מכיוון ש f על $f^{-1}\left[\{b\}\right]\neq\phi$ ומכיוון ש f חח"ע קיים לכל היותר איבר אחד ב $f^{-1}\left[\{b\}\right]$ ז"א בקבוצה $f^{-1}\left[\{b\}\right]$ קיים איבר אחד ויחיד נסמנו ב a_b.

$g(b)=a_b$ הפונקציה מוגדרת היטב מכיוון שלכל $b\in B$ קיים איבר אחד ויחיד ב $f^{-1}\left[\{b\}\right]$.

נוכיח שהפונקציה $g:B\to A$ היא ההופכית של הפונקציה f.

יהי $a\in A$ נסמן $f(a)=b$ ואז $a=a_b$. $(g\circ f)(a_b)=g\left(f(a_b)\right)=g(b)=a_b$.

יהי $b\in B$ ואז $(f\circ g)(b)=f\left(g(b)\right)=f(a_b)=b$.

הערה

אם $f:A\to B$ וקיימת פונקציה $g:B\to A$ כך ש $f\circ g=I_B$ אז לא בהכרח ש f הפיכה ולא בהכרח ש g ההופכית שלה.

דוגמה

$A=\{1,2,3\},B=\{5,6\}$.

נגדיר $f:A\to B$ ע"י $f(1)=5,f(2)=6,f(3)=5$ ו $g:B\to A$ ע"י $g(5)=1,g(6)=2$.

f אינה חח"ע ו g אינה על ולכן שתיהן לא הפיכות למרות ש $f\circ g=I_B$.

הסיבה: $g\circ f\neq I_A$.

הרחבה וצמצום של פונקציות

יהיו A,B,C קבוצות לא ריקות כך ש $A\subseteq B$, ויהיו $f:B\to C, g:A\to C$ פונקציות כך שלכל $x\in A$ מתקיים $f(x)=g(x)$. בתנאים אלה אומרים ש g היא צמצום של f ל A וש f היא הרחבה של g ל B . הסימון יהיה $g=f|_A$.

אם קיימת A כך ש g היא צמצום של f ל A , נאמר ש g היא צמצום של f , וש f היא הרחבה של g

דוגמה

תהיי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש $f(x)=\sqrt[4]{x^2}$ ותהיי $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ כך ש $g(x)=\sqrt{x}$ אז g היא צמצום של f ל $[0,\infty)$ ו f היא הרחבה של g ל $\mathbb{R}$.

הערה

צמצום של פונקציה לקבוצה חלקית נתונה הוא יחיד, לעומת זאת הרחבה לקבוצה נתונה אינה יחידה.

דוגמה

תהיי $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה, כך ש $g(x)=x$.

$f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\quad f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$f_1(x)=x\ ,\quad f_2(x)=|x|\ .$

שתי הפונקציות הן הרחבה של g ל $\mathbb{R}$, ואלו רק שתי דוגמאות מתוך אינסוף דוגמאות לפונקציות שהן הרחבה של g ל $\mathbb{R}$.

נשים לב שהפונקציה $g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ היא צמצום של הפונקציה $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ל $[0,\infty)$, אין פונקציה נוספת שהיא צמצום של $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ל $[0,\infty)$.

דוגמה נוספת

תהיי U קבוצה לא ריקה. לכל תת קבוצה A של U הפונקציה האפיינית של A היא הפונקציה $\chi_A:U\to\{0,1\}$ מוגדרת ע"י $\chi_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$.

אם $A,B\subseteq U$ אז $\chi_A|_B$ היא פונקציה קבועה אם ורק אם $B\subseteq A$ או $B\cap A=\phi$.

$\chi_A|_B:B\to\{0,1\}$ אם $B\subseteq A$ אז לכל $x\in B$ מתקיים $x\in A$ ולכן לכל $x\in B$ $\chi_A|_B(x)=1$ וקיבלנו פונקציה קבועה. אם $B\cap A=\phi$ אז לכל $x\in B$ מתקיים $x\notin A$ ולכן לכל $x\in B$ $\chi_A|_B(x)=0$ וקיבלנו פונקציה קבועה. שימו לב אם B לא מוכל ב A אז קיים $x\in B\setminus A$ ואז $\chi_A|_B(x)=0$ ואם $B\cap A\neq\phi$ אז קיים $x\in B\cap A$ ולכן $\chi_A|_B(x)=1$ ז"א הפונקציה לא קבועה.

דוגמאות לפונקציות כאשר התחום היא קבוצת מנה

ראינו שהיחס $R=\{a\in\mathbb{N}|3$ מחלק את $a\}$ הוא יחס שקילות מעל הטבעיים.

תהיי $f:\mathbb{N}/R\to\mathbb{N}$ כך ש $f([x])=x(\text{mod}\,3)+1$ יש להראות שאכן הפונקציה מוגדרת היטב.

יהיו $a,b\in[x]$ צריך להוכיח ש $f([a])=f([b])$ כי אחרת הקבל שלמקור אחד יש שתי תמונות בסתירה להגדרת פונקציה. $f([a])=a(\text{mod}\,3)+1, f([b])=b(\text{mod}\,3)+1$ מכיוון ש $3|a-b$ נקבל ש $a(\text{mod}\,3)=b(\text{mod}\,3)\Leftarrow a(\text{mod}\,3)+1=b(\text{mod}\,3)+1$ כדרוש.

סדרות

הגדרה

יהיו A קבוצה כלשהי ו n מספר טבעי. סדרה באורך n של איברי A היא פונקציה מ K_n ל A, כאשר $K_n=\{k\in\mathbb{N}|k\le n\}$.

סדרה אינסופית של איברים מ A היא פונקציה מ $\mathbb{N}$ ל A.

<u>דוגמאות</u>

1. $A=\mathbb{Q}$ $K_7=\{k\in\mathbb{N}|k\le 7\}$ אז $f:K_7\to A$ המוגדרת ע"י $f(n)=\frac{1}{n}$ היא סדרה באורך 7 המקיימת $f(1)=\frac{1}{1}, f(2)=\frac{1}{2},\dots, f(7)=\frac{1}{7}$ ניתן לרשום בקצרה $\frac{1}{1},\frac{1}{2},\dots,\frac{1}{7}$.
2. $A=\mathbb{Q}$ ו $f:\mathbb{N}\to A$ פונקציה המוגדרת ע"י $f(n)=\frac{1}{n}$ היא סדרה אינסופית.

<u>עוצמות</u>

ראינו שאם A,B קבוצות סופיות ו $|A|=|B|$ אז קיימת פונקציה חח"ע מ A על B ולהפך.

בקבוצות סופיות ניתן לספור את האיברים בקבוצה, דבר שלא ניתן לעשות בקבוצות אינסופיות.

מטרתנו לבחון האם קיימת פונקציה חח"ע ועל עבור שתי קבוצות אינסופיות.

למשל:

קיימת פונקציה חח"ע ועל מקבוצת הטבעיים לקבוצת השלמים.

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ באופן הבא: $f(n)=\frac{n}{2}$ אם n זוגי ו $f(n)=\frac{1-n}{2}$ אם n אי זוגי.

אנחנו נראה בהמשך שלא קיימת פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ שהיא חח"ע ועל.

<u>הגדרה</u>

יהיו A,B קבוצות. אם קיימת פונקציה חח"ע מ A על B נאמר ש A שקולה ל B, והסימון יהיה $A\sim B$.

<u>משפט</u>

השקילות $\sim$ היא רפלקסיבית, סימטרית וטרנזיטיבית.

<u>הוכחה</u>

1. פונקצית הזהות על A (I_A) היא חח"ע ועל, ולכן $A\sim A$.
2. אם $A\sim B$ אז קיימת פונקציה $f:A\to B$ שהיא חח"ע ועל, ולכן קיימת לה פונקציה הופכית $g:B\to A$ שהיא גם כן חח"ע ועל, ולכן $B\sim A$.
3. אם $A\sim B\wedge B\sim C$ אז קיימות פונקציות חח"ע ועל $f:A\to B$, $g:B\to C$ ולכן $g\circ f:A\to C$ חח"ע ועל ז"א $A\sim C$.

<u>הגדרה</u>

נאמר על שתי קבוצות שקולות שהן שוות עוצמה. $(A\sim B\Leftrightarrow |A|=|B|)$

<u>הערה</u>

העוצמה היא הכללה של "מספר האיברים" לקבוצה שאינה דווקא סופית.

<u>המלון של הילברט</u>

נציג את המלון של הילברט כדי להמחיש את השקילות בין קבוצות אינסופיות.

המלון של הילברט הוא אינסופי, באחד מהימים (בשיא העונה) הייתה תפוסה מלאה במלון. אחד האורחים ביקש מפקיד הקבלה להשכיר לחברו חדר, מכיוון שהוא החליט ברגע האחרון להצטרף לנופש. פקיד הקבלה ענה לא שהעניין לא אפשרי מכיוון שהמלון בתפוסה מלאה. המנהל שמע את השיחה והציע פתרון האורחים החדר מספר 1 יעבור לחדר מספר 2, האורחים בחדר מספר 2 יעברו לחדר מספר 3 וכן הלאה... בצורה כזאת נפנה את חדר מספר 1 ולחבר של האורח יהיה מקום פנוי.

למחרת הגיע אותו אורח לפקיד הקבלה וביקש לפנות לו אינסוף חדרים לאינסוף החברים שלו שמגיעים מחר (אורח מאוד חברותי). הפקיד חשש מהמנהל והתחיל לחשוב על פתרון לעניין, אחרי מספר דקות חזר הפקיד

עם רעיון האורח שנמצא בחדר מספר n יעבור לחדר מספר $2n$. (ז"א האורח בחדר מספר 1 יעבור לחדר מספר 2, האורח בחדר מספר 2 יעבור לחדר מספר 4, האורח בחדר מספר 3 יעבור לחדר מספר 6 וכו,...)
בצורה כזאת התפנו אינסוף חדרים לאינסוף החברים של האורח.

<u>קבוצה בת מנייה</u>

<u>הגדרה</u>

קבוצה נקראת בת מנייה אם היא סופית, או שקולה ל $\mathbb{N}$. (סימון לקבוצה אינסופית שהיא בת מניה $\aleph_0$)

<u>דוגמה</u>

ראינו שקיימת פונקציה חח"ע ועל מקבוצת הטבעיים לקבוצת השלמים.

$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ באופן הבא: $f(n)=\frac{n}{2}$ אם n זוגי ו $f(n)=\frac{1-n}{2}$ אם n אי זוגי.

ולכן $\mathbb{N}$ שקולה ל $\mathbb{Z}$ ז"א $\mathbb{Z}$ בת מניה (או $|\mathbb{Z}|=\aleph_0$)

<u>משפט</u>

בכל קבוצה לא ריקה של מספרים טבעיים יש איבר קטן ביותר.

<u>הוכחה</u>

נוכיח שלכל תת קבוצה של $\mathbb{N}$, שאין בה איבר קטן ביותר היא ריקה.
תהיי $A\subseteq\mathbb{N}$, ונניח שאין ב A איבר קטן ביותר.
נוכיח באינדוקציה שאם אין ב A איבר קטן ביותר אז $A=\phi$.
מכיוון שאין מספר טבעי קטן מ 1 אז אם $1\in A$ אז הוא הקטן ביותר ולכן $1\notin A$.
נניח ש n וכל המספרים הקטנים ממנו אינם ב A ונוכיח ש $n+1$ וכל המספרים הקטנים ממנו אינם ב A.
מספר קטן מ $n+1$ הוא n או אחד המספרים הקטנים מ n, על פי הנחת האינדוקציה הם לא ב A.
$n+1$ לא ב A מכיוון שאם הוא הייה ב A אז הוא הייה המספר הקטן ביותר ב A וזו סתירה להנחה שאין איבר קטן ביותר ב A.

<u>משפט</u>

כל קבוצה חלקית לקבוצה בת מנייה היא בת מנייה.

<u>הוכחה</u>

נוכיח, תחילה, שכל תת קבוצה של $\mathbb{N}$ היא בת מנייה. תהי B תת קבוצה של $\mathbb{N}$. אם B סופית היא בת מנייה על פי ההגדרה של קבוצה בת מנייה. אם B אינסופית נמצא פונקציה $f:B\to\mathbb{N}$ שהיא חח"ע ועל.
לכל $x\in B$ הקבוצה $\{y\in B|y\le x\}$ היא סופית (מספרם הוא לכל היותר x). תהיי $f:B\to\mathbb{N}$ הפונקציה הבאה: $f(x)=\left|\{y\in B|y\le x\}\right|$.
נוכיח ש $f:B\to\mathbb{N}$ חח"ע. נניח ש $x_1,x_2\in B$ כך ש $f(x_1)=f(x_2)$ ז"א
$\left|\{y\in B|y\le x_1\}\right|=\left|\{y\in B|y\le x_2\}\right|$. נניח בשלילה ש $x_1\ne x_2$ אז ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $x_1<x_2$.
מכיוון ש $x_1<x_2$ אז $\{y\in B|y\le x_1\}\subseteq\{y\in B|y\le x_2\}$ ($y\le x_2 \Leftarrow y\le x_1\wedge x_1<x_2$) ולכן
$\left|\{y\in B|y\le x_1\}\right|\le\left|\{y\in B|y\le x_2\}\right|$ מכיוון ש $x_2\in\{y\in B|y\le x_2\}\wedge x_2\notin\{y\in B|y\le x_1\}$ אז
$\left|\{y\in B|y\le x_1\}\right|\le\left|\{y\in B|y\le x_2\}\setminus\{x_2\}\right|$ ז"א $\left|\{y\in B|y\le x_1\}\right|\ne\left|\{y\in B|y\le x_2\}\right|$ בסתירה לכך ש
$\left|\{y\in B|y\le x_1\}\right|=\left|\{y\in B|y\le x_2\}\right|$.
נוכיח ש f היא על ז"א צ"ל שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש מקור.
נוכיח באינדוקציה. B אינסופית ולכן $B\ne\phi$ ז"א יש לה איבר ראשון a_0 ואז $f(a_0)=1$.

נניח שיש מקור ל $n\in\mathbb{N}$ כל שהו ונוכיח של $n+1$ יש מקור. B אינסופית וקבוצת איברי B שאינם עולים על a היא סופית, לכן קבוצת איברי B הגדולים מ a אינה ריקה, יהי b הראשון שביניהם ואז $f(b)=n+1$.

תהיי A קבוצה בת מנייה כלשהי, אם A סופית, כל תת קבוצה שלה סופית, ולכן בת מנייה. אם A אינסופית, אז A שקולה ל $\mathbb{N}$. תהיי B תת קבוצה של A ונוכיח שהיא בת מניה. תהיי f פונקציה חח"ע מ A על $\mathbb{N}$, אז $f[B]\subseteq\mathbb{N}$ ולכן היא בת מנייה. הפונקציה $g:B\to f[B]$, כך שלכל $x\in B$ $f(x)=g(x)$, היא חח"ע מ B על $f[B]$, לכן B שקולה לקבוצה בת מנייה ולכן היא בת מנייה.

<u>האלכסון של קנטור</u>

<u>משפט</u>

$$|\mathbb{N}\times\mathbb{N}|=|\mathbb{N}|$$

<u>הוכחה</u>

לכל זוג סדור נתאים איבר טבעי באופן הבא:

$$\underset{1}{(1,1)},\underset{3}{(1,2)},\underset{6}{(1,3)},\underset{10}{(1,4)}$$
$$\underset{2}{(2,1)},\underset{5}{(2,2)},\underset{9}{(2,3)}$$
$$\underset{4}{(3,1)},\underset{8}{(3,2)}$$
$$\underset{7}{(4,1)}$$

קיבלנו את הסדרה הבאה:

$(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3),...$ נשים לב שהסדרה מוגדרת באופן הבא: תחילה נספרים האיברים שסכום השיעורים הוא 2, אח"כ נספרים האיברים שסכום השיעורים הוא 3, וכן הלאה...

נבנה פונקציה שמתבססת על החוקיות הנ"ל.

מספר האיברים שסכום השיעורים של הוא n שווה ל n ולכן המיקום של האיבר הראשון שסכום השיעורים שלו הוא n: $1+(1+2+3...+(n-2))=1+\frac{(1+n-2)(n-2)}{2}=\frac{n^2-3n+4}{2}$.

כעת השיעור הימני של האיבר במקום ה k, שסכום שיעורי איבריו הוא n, הוא k.

ולכן הפונקציה היא $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש $f(a,b)=\frac{1}{2}\cdot\left((a+b)^2-3(a+b)+2\right)+b$.

שימו לב: $f(2,3)=\frac{1}{2}\cdot\left((2+3)^2-3(2+3)+2\right)+3=9$.

מהבנייה ניתן לראות שהפונקציה היא חח"ע ועל.

<u>מסקנה 1</u>

אם A,B קבוצות בנות מנייה אז הקבוצה $A\times B$ היא גם בת מניה.

<u>הוכחה</u>

תהיינה $f:A\to\mathbb{N},g:B\to\mathbb{N}$ פונקציות חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $h:A\times B\to\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ע"י $h(a,b)=(f(a),g(b))$ מכיוון ש f,g חח"ע ועל אז גם h חח"ע ועל ומכיוון ש $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ בת מנייה גם $A\times B$ בת מנייה.

<u>מסקנה 2</u>

$\mathbb{Q}$ בת מנייה.

<u>הוכחה</u>

נגדיר פונקציה $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ באופן הבא: $f\left(\frac{a}{b}\right)=(a,b)$ (כאשר $b>0$ ו $\frac{a}{b}$ שבר מצומצם) הפונקציה f חח"ע ולכן הפונקציה $f':\mathbb{Q}\to f[\mathbb{Q}]$ היא חח"ע ועל. מכיוון ש $f[\mathbb{Q}]$ אינסופית המוכלת בקבוצה בת מנייה $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ אז $f[\mathbb{Q}]$ בת מנייה ומכיוון ש $f':\mathbb{Q}\to f[\mathbb{Q}]$ חח"ע ועל גם $\mathbb{Q}$ בת מנייה.