

30.10.14

88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ד

מועד ב'

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על כל 6 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת לא תיבדק כלל.

חלק א'

1. (20 נק') הוכיחו את המשפט הבא:

יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל שדה F , ויהיו $U, W \subseteq V$ תתי מרחבים.

אז:

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

2. (15 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, ותהיינה $T, S: V \rightarrow V$ העתקות

לינאריות, ותהי העתקת האפס $0_V: V \rightarrow V$.

נניח כי $T \circ S = 0_V$.

א. הוכיחו/הפריכו: אם $T \neq 0_V$ אזי S אינה הפיכה

ב. הוכיחו/הפריכו: $\dim(\ker S) + \dim(\ker T) \geq \dim V$

3. (15 נק') תהינה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש $(A+I)^2 = 0$.

א. הוכיחו כי A הפיכה

ב. הביעו את $adj(A)$ באמצעות המטריצות A, I והסקלר $|A|$

4. (20 נק')

$$\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases} \text{ תהי מערכת משוואות}$$

ויהי U אוסף הפתרונות שלה.

ותהי $W = \text{span}\{(1, 0, 0, -1), (1, -1, 0, 0), (0, 1, 0, -1)\}$.

א. מצאו בסיס ומימד עבור $U \cap W$

ב. מצאו בסיס ומימד עבור $U + W$

5. (20 נק') הוכח/הפרך:

א. לכל שתי מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ מתקיים כי $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

ב. תהיינה $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש A הפיכה, אזי $N(B) = N(BA)$.

ג. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך ש $A^2 = 0$, אזי $A+I$ הפיכה.

ד. תהי $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כאשר n אי זוגי. אזי אם $A^T = -A$ אזי A אינה הפיכה.

6. דף נוסף לשאלה _____

6. (20 נק') נתונים וקטורים

$$w_1 = (1, 0, 1)$$

$$v_1 = (a, 1, 1)$$

$$w_2 = (1, 1, 0)$$

$$v_2 = (1, a, 1)$$

$$w_3 = (a, -1, -1)$$

$$v_3 = (1, 1, a)$$

א. מצאו לאילו ערכי a קיימת העתקה לינארית T המקיימת

$$Tv_1 = w_1$$

$$Tv_2 = w_2$$

$$Tv_3 = w_3$$

ב. עבור $a = 0$ מצאו את העתקה מסעיף א' במפורש

$$(T(x, y, z) = \dots \text{ נוסחה מהצורה } T(x, y, z) = \dots)$$

ג. מצאו את ההעתקה ההופכית להעתקה מסעיף ב'

דף נוסף לשאלה _____