דף תרגילים 7

תרגיל 1 עבור הפרמטריזציה של המישור $ax+by+cz=d$ שמצאתם בדף תרגילים הקודם, מיצאו את מקדמי גמא, בשתי דרכים:

1. לפי הגדרה.
2. באמצעות הנוסחא $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{i\ell;j} - g_{ij;\ell} + g_{j\ell;i})g^{\ell k}$.

תזכורת 1

1. המכפלה הוקטורית של $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}$ ו־ $w = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}$ מוגדרת להיות:

$$v \times w = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ v^1 & v^2 & v^3 \\ w^1 & w^2 & w^3 \end{vmatrix}$$

הוקטור $v \times w \in \mathbb{R}^3$ מאונך לשני הוקטורים v, w ומקיים את כלל יד ימין.

2. יהי x משטח רגולרי. הנורמל $n = n(u^1, u^2)$ למשטח בנקודה $x(u^1, u^2) \in \mathbb{R}^3$ מוגדר להיות:

$$n = \frac{x_1 \times x_2}{|x_1 \times x_2|}$$

הוא מאונך ל־ x_1, x_2 ולכן גם לכל וקטור במישור המשיק.

תרגיל 2 מיצאו פרמטריזציה של גליל עם רדיוס a סביב ציר z וחשבו את הוקטור הנורמל בכל נקודה (היעזרו בתזכורת לעיל).

תרגיל 3 חשבו את מקדמי גמא עבור הפרמטריזציה של הגליל שמצאתם בשאלה הקודמת,

1. לפי הגדרה.
2. באמצעות הנוסחא $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_{i\ell;j} - g_{ij;\ell} + g_{j\ell;i})g^{\ell k}$.

תרגיל 4 (2015 מועד א')
נתון טורוס המתקבל כמשטח סיבוב של המעגל $(x-a)^2 + z^2 = b^2$ במישור xz סביב ציר ה־ z ($a > b$).

1. מיצאו פרמטריזציה של הטורוס.
2. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הטורוס.
3. חשבו את סמלי גמא של הטורוס.

תרגיל 5 (2011 מועד א')
בקואורדינטות $(u^1, u^2) = (x, y)$, נניח $f(x,y) = \frac{9}{x}$ ונתבונן במטריקה המוגדרת על ידי נוסחה:

$$g_{ij}(x,y) = f(x,y)^2 \delta_{ij}$$

חשבו את המקדמים $\Gamma_{11}^1, \Gamma_{12}^1, \Gamma_{21}^1, \Gamma_{22}^1$ של המטריקה.

תרגיל 6 הראו כי $\Gamma_{ij}^{k}=\langle x_{ij},x_{\ell}\rangle g^{\ell k}$
(זו טענה $6.4.1$ מההרצאה)

תרגיל 7 יהיו $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n}$. הוכיחו את כלל לייבניץ:

$$\langle f,g\rangle'=\langle f',g\rangle+\langle f,g'\rangle.$$

(זו למה $6.5.2$ מההרצאה)

תרגיל 8 הראו כי $g_{ij;k}=2g_{m\{i}\Gamma_{j\}k}^{m}$.
(זו למה $6.5.3$ מההרצאה)

תרגיל 9 בטאו את מקדם Γ_{ij}^{k} באמצעות מקדמי המטריקה g_{ij}.
(זה משפט $6.6.1$ מההרצאה)

תרגיל 10 הראו כי אם $g_{ij}=\mu^{2}\delta_{ij}$ עבור $0<\mu\in\mathbb{R}$ אז לכל עקומה $\alpha:[a,b]\to\mathbb{R}^{2}$ מתקיים

$$L(x\circ\alpha)=\mu L(\alpha)$$

באשר $L(\gamma)$ מסמן אורך של עקומה.