משטחים מינימליים

יהי משטח נתון ע"י הפרמטריזציה $X\left(u^1,u^2\right)$.
עקמומיות גאוס: $K=k_1\cdot k_2$.
k_1 וk_2 ע"ע של מטריצת ווינגארטן(עקמומיות ראשית×2)

הגדרה - עקמומיות ממוצעת(Mean Curvature)

עקמומיות ממוצעת מוגדרת ע"י ממוצע העקמומיות הראשיות: $H=\dfrac{k_1+k_2}{2}$.

- במישור $H=0$
- בגליל $H\neq 0$.

$\Leftarrow$ H לא תכונה פנימית!

הגדרה - משטח מינימלי

משטח X נקרא משטח מינימלי אם $H=0$ בכל נקודה.

משפט

בהינתן עקומה סגורה S במרחב, אם M הוא המשטח ששפתו S בעל השטח המינימלי ביותר אז בהכרח M משטח מינימלי.

תרגיל

הוכח כי בכל נקודה p על משטח מינימלי M עקמומיות גאוס $k\leq 0$.

פתרון

M מינימלי $\Leftarrow H=0 \Leftarrow \dfrac{k_1+k_2}{2}=0 \Leftarrow k_1=-k_2$.

$$K=k_1\cdot k_2=-k_2^2\leq 0$$

■

תרגיל

הוכח ש$X\left(u,v\right)=\left(u\cos v,u\sin v,v\right)$ עבור $0\leq v\leq 2\pi$, $-1\leq u\leq 1$ הוא משטח מינימלי.

פתרון

צריך למצוא ע"ע של W

$$X_u=(\cos v,\sin v,0)\qquad X_v=(-u\sin v,u\cos v,1)$$

$$g_{ij}=\begin{pmatrix}1&0\\0&u^2+1\end{pmatrix}$$

נחשב את n:

$$X_u\times X_v=(\sin v,-\cos v,u)$$

$$|X_u\times X_v|=\sqrt{u^2+1}\Rightarrow n=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}(\sin v,-\cos v,u)$$

נחשב את L_{ij} ואז נשתמש בעובדה ש$W=-(L_{ij})(g_{ij})$:

$$\begin{array}{c}X_{uu}=(0,0,0)\\X_{uv}=(-\sin v,\cos v,0)\\X_{vv}=(-u\cos v,-u\sin v,0)\end{array}\Rightarrow\begin{array}{c}L_{11}=\langle X_{uu},n\rangle=0\\L_{12}=\langle X_{uv},n\rangle=\dfrac{-1}{\sqrt{u^2+1}}\\L_{22}=\langle X_{vv},n\rangle=0\end{array}\Rightarrow L_{ij}=\begin{pmatrix}0&\frac{-1}{\sqrt{u^2+1}}\\\frac{-1}{\sqrt{u^2+1}}&0\end{pmatrix}$$

$$W=-\overbrace{\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}}^{L_{ij}}\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}}^{g^{ij}}$$

$$L_i^{\ j}=-L_{ik}g^{kj}$$

$$W=-\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}\\-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{u^2+1}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-\frac{1}{(u^2+1)^{3/2}}\\-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{(u^2+1)^{3/2}}\\\frac{1}{(u^2+1)^{1/2}}&0\end{pmatrix}$$

עקמומיות ראשיות k_1 וk_2 הן ע"ע של המטריצה, ולכן נמצא אותן ע"י פתרון הפולינום האופייני

$$\lambda^2-\frac{1}{(u^2+1)^2}=0$$

$$\lambda^2=\frac{1}{(u^2+1)^2}$$

$$\lambda_1=+\frac{1}{u^2+1}\qquad\lambda_2=-\frac{1}{u^2+1}$$

מציאת סימן הערכים העצמיים

$$z = Q\left(x,y\right) = \left(x,y\right) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

המטרה: בהנתן מטריצה סימטרית ממשית לקבוע את סימן הערכים העצמיים בצורה קצרה ויעילה, ללא מציאת הערך הקונקרטי שלהם.

קריטריון יעקובי

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = P \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = P^T$$

נסתכל על הבלוק המכיל את $k \times k$ האיברים בפינה השמאלית עליונה של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{matrix}}}^{\Delta_k} & & a_{1n} \\ & & \vdots \\ & & a_{kn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} \quad \cdots \quad a_{nk} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \overbrace{\boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{matrix}}}^{\Delta'_k} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

הסימן של $\det \Delta_k$ שווה לסימן של $\det \Delta'_k$:

$$\begin{array}{rcl} a_n = |\Delta_1| & \Leftrightarrow & |\Delta'_1| = \lambda_1 \\ |\Delta_2| & \Leftrightarrow & |\Delta'_2| = \lambda_1\lambda_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |\Delta_n| & \Leftrightarrow & |\Delta'_n| = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n \end{array}$$

מסקנות

1. $|\Delta_k| > 0$ לכל k $\Leftrightarrow$ אם A חיובית לחלוטין $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n > 0$
2. $\begin{array}{l} |\Delta_1| < 0 \\ |\Delta_2| > 0 \\ |\Delta_3| < 0 \\ \vdots \end{array}$ $\Leftrightarrow$ אם a שלילית לחלוטין:$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n < 0$
3. $(-1)^n |\Delta_n| > 0$, $|\Delta_k| \neq 0$ לכל k אם החוקיות הקודמת לא מתקיימת $\Leftrightarrow$ אם $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \neq 0$ ומחליפים סימן - A אינה מוחלטת.
4. $|\Delta_k| = 0$ $\Leftrightarrow$אי אפשר לקבוע.

תרגיל

קבע האם המטריצה הבאה חיובית לחלוטים/שלילית לחלוטין/אינה מוחלטת:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון

$$|\Delta_1| = 3 \Rightarrow \lambda_1 > 0$$

$$|\Delta_2| = 6 - 4 = 2 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2 > 0$$

$$|\Delta_3| = 0 - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -12 + 2 = -10 \Rightarrow \lambda_1\lambda_2\lambda_3 < 0$$

$\Leftarrow$ Aאינה מוחלטת.

תרגיל

קבע כיצד יראה הגרף של התבנית הריבועית $Q(x) = -4x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2$

פתרון

$$Q(x) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{rcc} |\Delta_1| = -4 & \Rightarrow & \lambda_1 < 0 \\ |\Delta_2| = |2 - 9 = 3| & \Rightarrow & \lambda_1\lambda_2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{array}$$

$\Leftarrow$ המטריצה שלילית לחלוטין, לכן הגרף יהיה פרבולה בוכה.

שאלה דומה

מהי צורת העקומה $-ux^2 + 6xy - 3y^2 = -1$ במישור $\mathbb{R}^2$?

תזכורת

כל משוואה ריבועית עם x ו-y מגדירה חתך חרוט[1](למעט מקרים מנוונים)

[1]פרבולה, היפרבולה או אליפסה

איך מסווגים חתכי חרוט באופן כללי?

בודקים את הביטוי הריבועי בלבד, ובודקים את המטריצה המגדירה את התבנית:

1. אם $\begin{matrix}\lambda_1,\lambda_2>0\\ \lambda_1,\lambda_2<0\end{matrix}\ \bigvee \Leftarrow$ אליפסה
2. אם $\lambda_1\cdot\lambda_2<0$ (כלומר הם שוני סימן) $\Leftarrow$ היפרבולה
3. אם $\begin{matrix}\lambda_1\neq 0\\ \lambda_2=0\end{matrix}$ (או להיפך) $\Leftarrow$ פרבולה

מאיפה מתקבלים המחוברים הלינאריים, ומה המשמעות שלהם?

משוואות של אליפסה/היפרבולה/פרבולה בצורה קנונית

$$\lambda_1x^2+\lambda_2y^2=c$$

- $\left\{\begin{matrix}c,\lambda_1,\lambda_2>0\\ c,\lambda_1,\lambda_2<0\end{matrix}\right.\ \bigvee \Leftarrow$ אליפסה
- $\lambda_1\lambda_2<0 \Leftarrow$ היפרבולה
- $y=\lambda x^2 \Leftarrow$ פרבולה.

צירי המערכת הם צירי הסימטריה של הצורה, והמרכז הוא ב$(0,0)$
$\Leftarrow$ סיבוב מערכת הצירים מוסיף ביטוי $bxy \Leftarrow ax^2+bxy+cy^2=d$

דוגמה

$$4x^2-6xy+3y^2=1$$

נזיז את מערכת הצירים למרכז ב$(3,2)$:

$$x=\tilde{x}+3$$

$$y=\tilde{y}+2$$

$$4\left(\tilde{x}+3\right)^2-6\left(\tilde{x}+3\right)\left(\tilde{y}+2\right)+3\left(\tilde{y}+2\right)^2=1$$

$$4\tilde{x}+24\tilde{x}+26-6\tilde{x}\tilde{y}-12\tilde{x}-18\tilde{y}-36+3\tilde{y}^2+12\tilde{y}+12=1$$

$$\boxed{4x^2 - 6xy + 3y^2 + 12x - 6y + 11 = 0}$$