אנו מסתכלים על נקודות סינגולריות מבודדות - כלומר שקיימת סביבה שלהן שאין בה אף נקודה סינגולרית אחרת.
למשל נקודת הצטברות של נקודות סינגולריות היא לא מבודדת - למרות שהנקודות הסינגולריות בסביבה שלה יכולות להיות מבודדות.

הגדרה

נקודה סינגולרית סליקה α של פונקציה f מקיימת את התכונות:

1. הגבול $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$ קיים וסופי.
2. פונקציה $f(z)$ חסומה בסביבה של $z=\alpha$.
3. $\lim\limits_{z\to\alpha}\left[f(z)(z-\alpha)\right]=0$.

טור לורן סביב נקודה סינגולרית סליקה

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

למעשה, טור לורן הוא טור טיילור

הגדרה - קוטב

קוטב מסדר m מקיים את התכונות

1. $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-\alpha)^m}$ כאשר $g(z)$ אנליטית ושונה מ0 ב$z=\alpha$.
2. $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)=\infty$
3. $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)(z-\alpha)^m$ קיסם וסופי ושונה מאפס.

טור לורן סביב קוטב

$$\sum_{n=-m}^{\infty} a_n (z-\alpha)^n$$

הגדרה - נקודה סינגולרית עיקרית

נקודה סינגולרית עיקרית מקיימת את התכונות:
הגבול $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$ לא קיים.

טור לורן סביב נקודה סינגולרית עיקרית

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(z-\alpha\right)^n$$

משפט וירשטראס קסוראטי

עבור נקודה סינגולרית עיקרית α, לכל מספר $\omega\in\mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות $\left\{z_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש$z_n\to\alpha$ ומתקיים $f\left(z_n\right)\to\omega$ לכל סביבה של α.

משפט

אם α הוא אפס מסדר m של פונקציה אנליטית f, אז α הוא קוטב מסדר m של פונקציה

$$g\left(z\right)={}^{1}\!/_{f(z)}$$

תרגיל

מצא וסווג נקודות סינגולריות:

א) $f\left(z\right)=\dfrac{1}{z\sin z}$

ב) $g\left(z\right)=\dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

ג) $h\left(z\right)=\left(z-3\right)\sin\dfrac{1}{z+2}$

פתרון

א) הנקודות הסינגולריות הן $z_n=\pi n, n\in\mathbb{N}$. נסמן $g\left(z\right)=z\sin z$. נקודות $z_n=\pi n,\ \begin{matrix} n\in\mathbb{Z} \\ n\neq 0\end{matrix}$ הן אפסים פשוטים של $g\left(z\right)$:

$$g'\left(z\right)=\sin z+z\cos z\Rightarrow g'\left(\pi n\right)=0+\left(\pi n\right)\left(-1\right)^n\neq 0$$

אבל נק' $z=0$:

$$g'\left(0\right)=0+0=0$$

$$g''\left(z\right)=\cos z+\cos z-z\sin z\Rightarrow g''\left(0\right)=2\neq 0$$

$z=0$ ⇐ אפס מסדר 2.

לפי המשפט:

- $z=0$ ⇐ קוטב מסדר 2.
- $z=\pi n, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0$ ⇐קוטב מסדר 1(פשוט)

ב) נקודות סינגולריות הן

$$z=0$$

$$\frac{1}{z_n}=\pi n\Rightarrow z_n=\frac{1}{\pi n}, n\in\mathbb{Z}, n\neq 0$$

נסתכל על

$$\lim_{z\to\frac{1}{\pi n}}\left(z-\frac{1}{\pi n}\right)g(z)=\lim n_{z\to\frac{1}{\pi n}}\frac{\left(z-\frac{1}{\pi}\right)}{\sin\frac{1}{z}}=\text{"0"}{0}=$$

לפי לופיטל

$$=\lim_{z\to\frac{1}{\pi n}}\frac{1}{\cos\frac{1}{z}\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\frac{(\pi n)^2}{\cos(\pi n)}\neq 0$$

קיים וסופי לכל n נתון ⇐ $\frac{1}{\pi n}, \begin{array}{l} n\neq 0\\ n\in\mathbb{Z}\end{array}$ - נקודות סינגולריות, קוטב פשוט.

$z=0$ - נקודת הצברות של קטבים פשוטים.

ג) $(z-3)\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$

$$(z+2-5)\cdot\sin\left(\frac{1}{z+2}\right)$$

תרגיל 4 בתרגול הקודם - עשינו פיתוח לטור לורן סביב נקודה $z=-2$ וקיבלנו טור $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cdots$ ⇐$z=-2$ נקודה סינגולרית עיקרית.

תרגיל

f אנליטית בעיגול מנוקב $\{z|0<|z-\alpha|<R\}$ כך ש$f(z)\neq 0$ לכל z בעיגול מנוקב.

יש לחשב את $\operatorname{Res}(g,\alpha)$, כאשר $g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}$

א) α הוא אפס מסדר m של f.

ב) α הוא קוטב מסדר m של f.

פתרון

א) $f(z)=(z-\alpha)^m\cdot\tilde{f}(z)$, כאשר $\tilde{f}(z)$ אנליטית ושונה מ0 ב$z=\alpha$.

$f'(z)=m(z-\alpha)^{m-1}\cdot\tilde{f}(z)+(z-\alpha)^m\cdot\tilde{f}'(z)$

$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{m}{(z-\alpha)}+\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}$$

$\tilde{f}(z)$ אנליטית ולא מתאפסת ב$z=\alpha$

$\Leftarrow$ הפונקציה $\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}$ פונקצי אנליטית בעיגול הלא מנוקב, ולכן טור לורן שלה הוא טור טיילור.

$\Leftarrow$ $a_{-1}=\operatorname{Res}(g,\alpha)=m$

ב)

$$f(z)=\frac{\tilde{f}(z)}{(z-\alpha)^m}$$

$$f'(z)=\frac{\tilde{f}'(z)}{(z-\alpha)^m}-\frac{m\tilde{f}(z)}{(z-\alpha)^{m+1}}$$

$$g(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{\tilde{f}'(z)}{\tilde{f}(z)}-\frac{m}{(z-\alpha)}$$

השארית

$$a_{-1}=\operatorname{Res}(g,\alpha)=-m$$

תרגיל

f שלימה ומקיימת $|f(z)|\le|e^2-1|$ לכל z.
צ"ל: $f(z)=c(e^z-1)$, כאשר $|c|\le1$

הוכחה

נגדיר $g(z)=\frac{f(z)}{e^z-1}$ בתחום $\mathbb{C}\setminus\{2\pi ik|k\in\mathbb{Z}\}$. נשים לב שבסביבה של כל נקודה $z=2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ מתקיים

$$|g(z)|=\left|\frac{f(z)}{e^z-1}\right|\le1$$

$\Leftarrow$ נקודות $z_k=2\pi ik$ הן סינגולריות מסוג סליקה.

ניתן להגדיר

$$\tilde{g}(z)=\begin{cases} g(z) & z\neq 2\pi ik, k\in\mathbb{Z} \\ w_k & z=2\pi ik, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

$\tilde{g}(z)$ פונקציה שלמהו, וכיוון שהיא רציפה בסיבה של $z=2\pi ik$ היא גם חסומה ע"י 1 $\Leftarrow$ $|w_k|\leq 1$, ולכן, לפי משפט ליוביל, $\tilde{g}(z)$ קבועה. כלומר $\tilde{g}(z)=c=\text{const}$ (ו-$|c|\leq 1$)

$\Leftarrow$ $c=\tilde{g}(z)=g(z)=\frac{f(z)}{e^z-1}$ (עבור כל $z\neq 2\pi ik$)

$\Leftarrow$ $f(z)=c\cdot(e^z-1)$

עבור $z=2\pi ik$, $k\in\mathbb{Z}$:

$$|f(z)|\leq|e^z-1|=0$$

$$\Rightarrow f(z)=0$$

כלומר, פונקציה $f(z)$ מוגדרת גם בנקודות $z=2\pi ik$, $k\in\mathbb{Z}$.

מעגל השארית

יהי Γ קונטור סגור ו-f אנליטית על ובתוך Γ פרט לנקודות $a_1,a_2,\ldots a_n$ שנמצאות בפנים של Γ, אזי

$$\int_\Gamma f(z)=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f,a_k)$$

חישוב שאריות

1. נקודה סינגולרית ריקה: השארית שווה לאפס
2. נקודה סינגולרית עיקרית: בד"כ אין ברירה חוץ מלחשב דרך טור לורן.
3. קטבים:
   - אם α זה קוטב פשוט:

$$\text{Res}(f,\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[(z-\alpha)\cdot f(z)\right]$$

   - אם α קוטב מסדר m:

$$\text{Res}(f,\alpha)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to\alpha}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}\left[f(z)(z-\alpha)\right]^m$$

תרגיל

$f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ כאשר g, h אנליטיות בα כך ש$h(\alpha) = 0, h'(\alpha) \neq 0$.

צ"ל: $\operatorname{Res}(f,\alpha) = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$

הוכחה

נניח תחילה ש$g(\alpha) \neq 0$. α הוא אפס פשוט של $h(z)$ ולכן α הוא קוטב פשוט של $\dfrac{1}{h(z)}$ וגם קוטב פשוט של $\dfrac{g(z)}{h(z)}$.

$$\operatorname{Res}(f,\alpha) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\cdot f'(z) = \lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)\frac{g(z)}{h(z)} =$$

$$= \lim_{z\to\alpha}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(\alpha)}{(z-\alpha)}} = \frac{g(\alpha)}{h'(\alpha)} \qquad \blacksquare$$

עכשיו, נניח כי $g(\alpha) = 0$. נניח כי α הוא אפס מסדר m של $g(z)$

$$\begin{cases} g(z) = (z-\alpha)^m \tilde{g}(z) \\ h(z) = (z-\alpha)\tilde{h}(z) \end{cases}$$

כאשר $\tilde{g}, \tilde{h}$ אנליטיות ולא מתאפסות בα.
לכל $z \neq \alpha$ נקבל:

$$f(z) = \frac{(z-\alpha)^m \cdot \tilde{g}(z)}{(z-\alpha)\cdot \tilde{h}(z)} = (z-\alpha)^{m-1}\frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}(z)}$$

כלומר, קיבלנו שבסביבה של הנקודה $z=\alpha$, פונקציה f מתלכדת עם פונקציה אנליטית בα, ולכן $z=\alpha$ היא נקודה סינגולרית סליקה $\Leftarrow$ $\operatorname{Res}(f,\alpha) = 0 = \dfrac{g(\alpha)}{h'(\alpha)}$

$\blacksquare$