בחינה סופית באנליזה מודרנית — 88־341

מועד א' תשע"ט

<u>מרצים</u>: ד"ר שמעון ברוקס
<u>משך הבחינה</u>: 3 שעות
<u>חומר עזר</u>: ללא חומר עזר

ענו על 4 מתוך 5 השאלות הבאות. כל שאלה 25 נקודות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים, הסבירו את הדרך, והקיפו תשובות סופיות.

.1

(א) הוכח: $m(A)=0$ אם ורק אם $m^*(A\cup B)=m^*(B)$ לכל $B\subset\mathbb{R}$.
(כאשר m^* היא מידה חיצונית ו־m היא מידת לבג.)

(ב) תהי $\mu:\mathcal{P}(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ מוגדרת ע"י $\mu(A)=0$ כאשר A קבוצה סופית, ואילו $\mu(A)=\infty$ כאשר A קבוצה אינסופית. האם μ היא מידה?

.2

(א) הוכח או הפרך: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה־לבג, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית, אזי ההרכבה $g\circ f$ מדידה־לבג.

(ב) הוכח או הפרך: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה־לבג, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי ההרכבה $g\circ f$ מדידה־לבג.

3. הוכח "למת פאטו ההפוכה": תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות מדידות חיוביות, ותהי $g \in L^1(X,\mu)$ המקיימת $f_n(x) \leq g(x)$ לכל n ולכל x. אזי

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X \limsup_{n\to\infty} f_n d\mu$$

4. הוכח שאם $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט והנגזרת $F'(x)\leq 0$ כב"מ, אזי $F(b)\leq F(a)$.
האם טענה זו נכונה אם F אינה רציפה בהחלט, אך מניחים שהיא רציפה ובעלת השתנות חסומה?

5. תהיו $A,B\subset\mathbb{R}$ קבוצות מדידות־לבג, ונגדיר פונקציה

$$h(x) = m((A-x)\cap B)$$

הוכח כי h מדידה ומתקיים

$$\int_{\mathbb{R}} hdm = m(A)\cdot m(B)$$

בהצלחה רבה!

מועד א' קשה

1) א. הוכיחו $m(A)=0$ אמ"מ $m^*(A\cup B)=m^*(B)$ לכל $B\subseteq\mathbb{R}$.

הוכחה: ($\Leftarrow$) נניח $m(A)=0$. מצד אחד $A\cup B\supseteq B$ ולכן ממונוטוניות המידה החיצונית, $m^*(A\cup B)\ge m^*(B)$. מצד שני, מתת-אדיטיביות נקבל $m^*(A\cup B)\le m^*(A)+m^*(B)=m^*(B)$ ולכן $m^*(A\cup B)=m^*(B)$.

($\Rightarrow$) בפרט עבור $B=\emptyset$ נקבל $m^*(A)=m^*(A\cup B)=m^*(B)=m^*(\emptyset)=0$.
ראינו שאם $m^*(A)=0$ אז A מדידה ומתקיים $m(A)=0$.

ב. תהי $\mu:P(\mathbb{R})\to[0,\infty]$ מוגדרת לפי $\mu(A)=0$ אם A סופית, ו- ∞ $\mu(A)=$ אם A אינסופית. האם μ היא מידה?

פתרון: לא, היא לא מקיימת σ-אדיטיביות. למשל

$$\infty=\mu(\mathbb{N})=\mu\left(\bigcup\{n\}\right)\neq\sum_{n=1}^{\infty}\mu(\{n\})=\sum_{n=1}^{\infty}0=0$$

תגבורים: מידה חיצונית, מידה, תכונות המידה

2) א. הוכיחו/הפריכו: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית, אז ההרכבה $g\circ f$ מדידה לבג.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה לבג, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה, אז ההרכבה $g\circ f$ מדידה לבג.

תזכורת: ~~f מדידה~~ אם (X,S) מרחב מדיד, אז $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה אמ"מ לכל קבוצה A מדידה בורל, $f^{-1}(A)\in S$. (ראינו בתרגול)

טענה: אם $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה לבג ו- $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מדידה בורל אז $h=g\circ f$ מדידה לבג.

הוכחה: תהי $A\subseteq B(\mathbb{R})$ מדידה בורל. g מדידה בורל, ולכן $g^{-1}(A)$ מדידה בורל. f מדידה לבג ולכן $h^{-1}(A)=f^{-1}(g^{-1}(A))\in S$, ולכן h מדידה לבג.

מכאן אפשר להוכיח את שני הסעיפים.

א. טענה: אם g מונוטונית אז g מדידה בורל. בה"כ נניח g מונוטונית עולה.

הוכחה: לכל x נסמן $A_x=g^{-1}((-\infty,x])=\{t\mid g(t)\le x\}$. נניח $u\in A_x$, אז $g(u)\le x$. כעת לכל $v\le u$ מתקיים $g(v)\le g(u)\le x$. ולכן A_x היא קרן או $\emptyset$ או $\mathbb{R}$, ולכן מדידה בורל. אז g מדידה בורל.

ב. טענה: אם g רציפה אז g מדידה בורל.

הוכחה: נסמן $F=\{E\in B(\mathbb{R})\mid g^{-1}(E)\in B(\mathbb{R})\}$. נראה שזו σ-אלגברה. ברור כי $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset\in B(\mathbb{R})$ ולכן $\emptyset\in F$. נניח $E\in F$. אז $g^{-1}(E^c)=(g^{-1}(E))^c\in B(\mathbb{R})$ ולכן $E^c\in F$. יהיו $\{E_n\}\subseteq F$ איחוד בן מניה. אז $g^{-1}(\cup E_n)=\cup g^{-1}(E_n)\in B(\mathbb{R})$ ולכן $\cup E_n\in F$. ולכן F σ-אלגברה.

כעת g רציפה, ולכן לכל קבוצה פתוחה A, $g^{-1}(A)$ פתוחה, ולכן F מכילה את כל הקבוצות הפתוחות, ולכן $F=B(\mathbb{R})$. כלומר לכל A בורל, $g^{-1}(A)$ מדידה בורל. ולכן g מדידה בורל.

תזכורות: פונ' מדידה, תכונות של פונ' מדידות, σ-אלגברה, σ-אלגברת בורל.

3. הוכיחו את למת פאטו ההפוכה: יהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונ' מדידות אי-שליליות, ויהי $g\in L(X,\mu)$ המקיימת $f_n(x)\le g(x)$ לכל n ולכל x. אז $\limsup\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu \le \int_X \limsup\limits_{n\to\infty} f_n\,d\mu$.

תזכורת: למת פאטו - אם $f_n: X\to[0,\infty]$ מדידות אז $\int_X \liminf\limits_{n\to\infty} f_n\,d\mu \le \liminf\limits_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu$.

הוכחה:

נגדיר $h_n=g-f_n$. לפי ההנחה מתקיים $h_n\ge 0$. בנוסף

$\int_X h_n\,d\mu=\int_X (g-f_n)\,d\mu=\int_X g\,d\mu-\int_X f_n\,d\mu$. מהלמה של פאטו מתקיים

$\int_X \liminf h_n\,d\mu\le \liminf\int_X h_n\,d\mu$. כעת, מצד אחד

$$\int_X \liminf h_n\,d\mu=\int_X g\,d\mu+\int_X \liminf(-f_n)\,d\mu=\int_X g\,d\mu-\int_X \limsup f_n\,d\mu$$

ומצד שני $\liminf\int_X h_n\,d\mu=\int_X g\,d\mu-\limsup\int_X f_n\,d\mu$. נחסיר $\int_X g\,d\mu$ משני

האגפים, ונקבל בדיוק את הדרוש.

תזכורת: $\liminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)=-\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$.

תזכורות: למת פאטו, משפטי התכנסות אינטגרלים

(4) הוכיחו שאם $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה בהחלט והנגזרת $F'(x)\le 0$ כב"מ אז $F(b)\le F(a)$.

האם טענה זו נכונה אם F אינה רציפה בהחלט, אך נניח שהיא רציפה ובעלת השתנות חסומה?

פתרון: F רציפה בהחלט. מהמשפט היסודי (חלק ב'), $F'(x)$ קיימת כב"מ ומתקיים $F(b)-F(a)=\int_a^b F'(x)\,dm$. נותר להוכיח כי $\int_a^b F'(x)\,dm\le 0$. נסמן $E=\{x\in[a,b]\mid F'(x)\le 0\}$.

אז $m(E^c\cap[a,b])=0$, ולכן

$$\int_a^b F'(x)\,dm=\int_E F'(x)\,dm+\int_{E^c} F'(x)\,dm=\int_E F'(x)\,dm\le\int_E 0\,dm=0$$

לכן $F(b)\le F(a)$.

אם F אינה רציפה בהחלט אבל רציפה ובעלת השתנות חסומה זה לא נכון.

ניקח את F להיות פונקציית קנטור ב-$[0,1]$. אז F רציפה, בעלת השתנות חסומה, $F'=0$ כב"מ, אבל $F(1)=1>0=F(0)$.

תזכורת: השתנות חסומה, רציפות בהחלט. בהקשר של המשפט היסודי.

דוגמאות נגדיות מפורסמות.

(3) תהיינה $A,B\subseteq\mathbb{R}$ מדידות לבג, ונגדיר פונקציה $h(x)=m((A-x)\cap B)$.

הוכיחו כי h מדידה ומתקיים $\int_{\mathbb{R}} h\,dm = m(A)\cdot m(B)$.

הוכחה: A מדידה לכן $(A-x)$ מדידה לכל $x\in\mathbb{R}$. B מדידה, לכן $(A-x)\cap B$ מדידה כחיתוך סופי של מדידות. לכן $\mathbb{1}_{(A-x)\cap B}$ פונקציה מדידה ואי-שלילית. מידת לבג היא שלמה ו-σ-סופית. לכן ניתן להשתמש במשפט טונלי, שיבטיח גם את מדידות h.

נשים לב כי $h(x)=\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(A-x)\cap B}\,dm$. לכן

$$\int_{\mathbb{R}} h\,dm = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(A-x)\cap B}\,dm(t)\,dm(x) = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(A-x)}\cdot \mathbb{1}_B\,dm(x)\,dm(t)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(A-x)}\,dm(x)\right)dm(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{(A-t)}\,dm(x)\right)dm(t)$$

$$\mathbb{1}_{(A-x)}(t) = \mathbb{1}_{(A-t)}(x)$$
$$t\in A-x \iff x+t\in A \iff x\in A-t$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B\cdot m(A-t)\,dm(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B\, m(A)\,dm(t) = m(A)\cdot\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_B\,dm(t) = m(A)\cdot m(B)$$

תזכורת: מידות מכפלה, משפט פוביני/טונלי.

תזכורת: אינטגרל פונקציונלים.