רשתות זרימה

קלט: רשת זרימה $G=(V,E)$, c,s,t כאשר s קודקוד מקור, t קודקוד יעד, וc פונקציית קיבולות.

פלט: זרימה f על G כך ש$|f|$ מקסימום.

פורד-פלקרסון(בקיצור)

1. אתחל בזרימת 0
2. כל עוד יש "מסלול שיפור" p הוסף זרימה לאורך p(מוסיפים $c_+(p)=\min\{c_f(u,v)|(u,v)\in p\}$)

זמן הריצה של פורד-פלקרסון

קשה לדעת כמה זמן בדיוק לוקח למצוא מסלול שיפור, ולעבור על כולם וכו'. אבל אם כל הקיבולות מספרים טבעיים, אז זמן הריצה של פורד-פלקרסון חסום ב$O((|V|+|E|)|f^*|)$ כאשר F^* פתרון מכסימום.

היוריסטיקה אדמונדס-קראפ

הרץ פורד-פלקרסון עם BFS(למציאת מסלול שיפור)

איך זה משפר?

סימון עבור $u,v\in V$ נסמן ב$\delta_f(u,v)$ את המרחק הקצר ביותר מu לv בG_f(רשת השיורית) (מרחק נמדד במספר הקשתות במסלול).

למה

אם מריצים את אדמונדס-קארפ אז לכל $v\in V-\{s,t\}$, $\delta_f(s,v)$ גדל מונוטונית(אינו קטן)

הוכחת הלמה

נניח בשלילה שקיים $v\in V-\{s,t\}$ כך ש$\delta_f(s,v)$ מתקצר. נסמן בf את הזרימה רגע לפני שהמרחק מs לv התקצר ובf' את הזרימה רגע אחרי, כלומר

$$\delta_{f'}(s,v)<\delta_f(s,v)$$

נסמן בX את כל הקודקודים שהתקצרו בסיבוב הנ"ל. כלומר $X=\{v|\delta_{f'}(s,v)<\delta_f(s,v)\}$.
נסמן בv_0 קודקוד $v_0\in X$ המקיים $\forall_{v\in X}\delta_{f'}(s,v_0)\le\delta_{f'}(s,v)$. נסמן ב$p$ את המסלול הקצר ביותר מs לv_0 ב$G_{f'}$ ונסמן בu את קודמו של v_0 על המסלול.

$$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v_0)-1$$

לכן $\delta_{f'}(s,u)<\delta_{f'}(s,v_0)$
לכן $u\notin X$(כלומר המרחק מs לu לא התקצר במעבר מf לf')
כלומר $\delta_{f'}(s,u)\ge\delta_f(s,u)$

נתבונן ב2 מקרים:

1. $c_f(u,v)=c(u,v)-f(u,v)>0 \Leftrightarrow (u,v_0)\in G_f$
2. $c(u,v)=f(u,v) \Leftrightarrow (u,v_0)\notin G_f$

מקרה 1: $(u,v_0)\in G_f$

$$\delta_f(s,v_0)\leq\delta_f(s,u)+1$$

$$\delta_f(s,v_0)\leq\delta_f(s,,u)+1\leq\delta_{f'}(s,u)+1\leq\delta_{f'}(s,v_0)$$

סתירה לכך ש$v_0\in X$(כלומר שv_0 התקצר)

מקרה 2: $(u,v_0)\notin G_f$

מצד שני, $(u,v_0)\in G_{f'}$ לכן מסלול השיפור במעבר מG_f ל$G_{f'}$ עבר ב(v_0,u)(כי קשת יכולה להתווסף רק כתוצאה מזרימה נגדית, מה שאומר שהוספנו ל(v_0,u))

נסמן בp את מסלול השיפור בין G_f ל$G_{f'}$. כיוון שאדמונדס-קארפ בוחר מסלולים לפי BFS $\delta_f(s,v_0)=\delta_f(s,u)-1$, לכן

$$\delta_f(s,v_0)=\delta_f(s,u)-1\leq\delta_{f'}(s,u)-1=\delta_{f'}(s,v_0)-2\,(<\delta_{f'}(s,v_0))$$

סתירה לכך שX $v_0\in X$. מ.ש.ל.

משפט

אם מריצים את אדמונדס-קארפ על רשת זרימה $G=(V,E)$, c,s,t אז מספר הסיבובים=$O(|V|\,|E|)$.

הוכחה

נתבונן בG_f ובמסלול השיפור על G_f שנסמנו p.

קשת $(u,v)\in p$ נקראת <u>קריטית</u> אם $c_f(u,v)=c_f(p)$.

נסמן בf' את הזרימה אחריו(לאו דווקא מיד אחריו) כך שאחרי f' (u,v) מופיע מחדש.

$$(1)\quad \delta_f(s,v)=\delta_f(s,u)+1$$

מצד שני (u,v) מופיעה מיד אחרי f' ולכן מסלול השיפור על f', שנסמנו p', עובר ב(v,u).

$$(2)\quad \delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1$$

לכן

$$\delta_{f'}(s,u)=\delta_{f'}(s,v)+1\geq\delta_f(s,v)+1$$

לכן מספר הפעמים ש(u,v) קריטית $<\dfrac{|V|}{2}$

מצד שני, בכל סיבוב יש קשת קריטית.

כיוון שמס' הקשתות= $O(|E|)$ וקשת קריטית לכל היותר $\dfrac{|V|}{2}$ פעמים $\Leftarrow$ מס' הסיבובים $O(|V|\,|E|)$. מ.ש.ל.

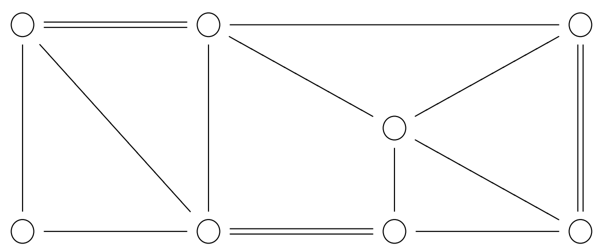
מסקנה

זמן הריצה של אדמונדס-קארפ=$O\left(\left(|V|+|E|\right)\left(|V|\,|E|\right)\right)$.

זיווגים(התאמות) Matching

זיווג בגרף $G=(V,E)$(לא מכוון) הוא אוסף קשתות $M\subseteq E$ כך שלכל $v\in V$ יש לכל היותר קשת אחת $e\in M$ כך ש$v\in e$.

דוגמה



קלט: גרף $G=(V,E)$

פלט: התאמה M כך ש$|M|$ מקסימום.

הערה

$$\frac{|V|}{2}\geq |M|$$

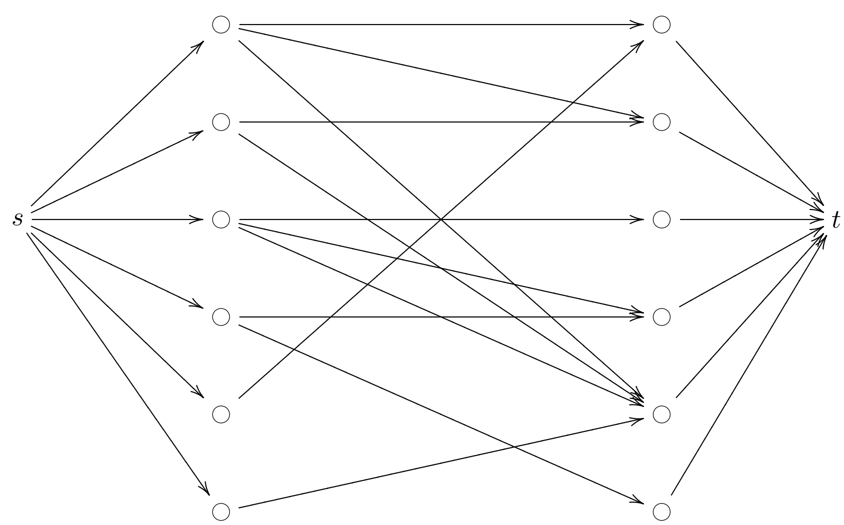
הגדרה

גרף $G=(V,E)$ הוא דו-חלקי אם ניתן לחלק את V, כלומר $V=V_1\uplus V_2$, כך שלכל $(u,v)\in E$ $u\in V_1$ ו$v\in V_2$ או $u\in V_2$ ו$v\in V_1$.

נסמן:

B הגרף הדו חלקי, $G\left(B\right)$ רשת זרימה(מוסיפים לB את s,t)

$G\left(B\right)$ B



טענה

ב$G\left(B\right)$ יש זרימה f כך ש$|f|=k$ אם"ם בB יש התאמה M כך ש$|M|=k$