הגדרה

שפה L תהיה <u>רגולרית</u> אם קיים אוטומט המקבל אותה, כלומר $L\left(A\right)=L$.

משפט הסגירות

השפות הרגוליות סגורות תחת פעולות בינאריות(איחוד, חיסור וכו')

הערה:

- עבור קבוצה $A\subseteq\Omega$, ניתן להגדיר $2^{2}=4$ פעולות אונריות - לקיחת A, לקיחת A^{c}, לקיחת Ω ולקיחת $\emptyset$. הסיבה לכך היא שאנו מכירים 2 חלקים זרים שניתן להתייחס אליהם - A וA^{c}.
- עבור שתי קבוצות $A,B\subseteq\Omega$, ניתן להגדיר $2^{4}=16$ פעולות בינאריות, שכן הפעם ניתן להתייחס ל4 חלקים זרים: $A\backslash B,B\backslash A,A\cap B,\Omega\backslash\left(A\cup B\right)$

כלומר אם L_{1},L_{2} רגולרים, אז גם $L=L_{1}\square L_{2}$ רגולריות, כאשר ב$\square$ ניתן לשים כל פעולה בינארית על קבוצות - $\cup,\cap,-,\Delta$ וכו'.

הוכחה

נתון קיימים A,B המקבלים L_{1},L_{2} בהתאמה:

$$A=\left\langle Q_{A},\Sigma,q_{0A},\delta_{A},F_{A}\right\rangle$$

$$B=\left\langle Q_{B},\Sigma,q_{0B},\delta_{B},F_{B}\right\rangle$$

נרצה לבנות אוטומט שמקבל את $A\square B$. בשביל זה נבנה אוטומט מכפלה.

אוטומט מכפלה

$$C=\left\langle Q_{A}\times Q_{B},\Sigma,\left(q_{0A},q_{0B}\right),\delta_{C},F_{C}\right\rangle$$

$$\delta_{C}:\left(Q_{A}\times Q_{B}\right)\times\Sigma\to Q_{A}\times Q_{B}$$

$$\delta_{C}\left(\left(q,p\right),\sigma\right)=\left(\delta_{A}\left(q,\sigma\right),\delta_{B}\left(p,\sigma\right)\right)$$

$$F_{C}=?$$

כדי לבחור את F_{C}, צריך לדעת מה הפעולה שרוצים לבצע על A,B:

פעולה	F_C-מצבים מקבלים
$\cap$	$\left\{(q,p) \middle\vert \begin{array}{c} q\in F_A \\ \wedge \\ p\in F_B \end{array}\right\} = F_A \times F_B$
$\cup$	$F_A \times Q_B \cup Q_A \times F_B$
$-$	$F_A \times (Q_B - F_B)$

וכן הלאה, ניתן להגדיר כל אחת מ16 הפעולות הבינאריות.

תרגיל

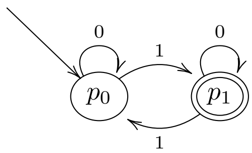
בנו אוטומט מכפלה המקבל את השפה הבאה:

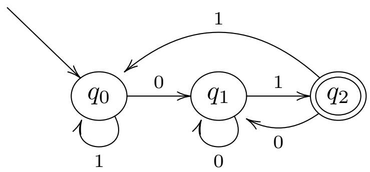
1. מילים בהן מספר ה1ים הוא אי זוגי - כלומר $\{w | 2 \nmid \#_1(w)\}$
2. וגם שמסתיימות ב01

מעל $\Sigma = \{0,1\}$.

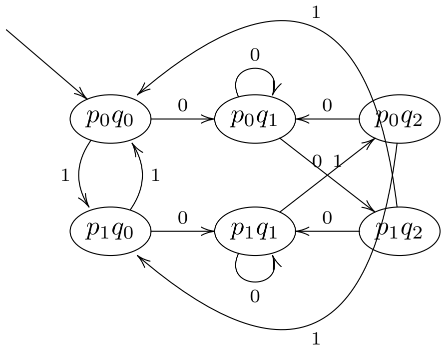
פתרון

א. נבנה אוטומטים בסיסיים





ב. נבנה אוטומט מכפלה



ג. נגדיר F לאוטומט מכפלה

$$L_1 \cup L_2$$

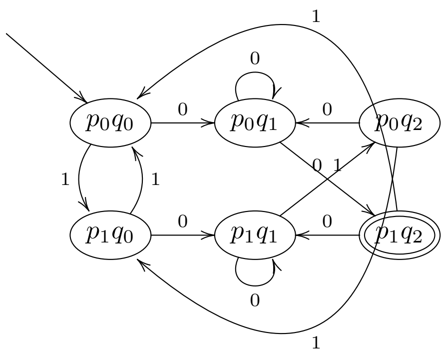
$$F = F_A \times Q_B \cup Q_A \times F_B = \{p_1\} \times \{q_0, q_1, q_2\} \cup \{p_0, p_1\} \times \{q_2\} =$$

$$= \{(p_1, q_0), (p_1, q_1), (p_1, q_2), (p_0, q_2)\}$$

$$L_1 \cap L_2 : F_A \times F_B = \{(p_1, q_2)\}$$

$$L_1 \Delta L_2 : F = \{(p_1, q_0), (p_1, q_1), (p_0, q_2)\}$$

ובאוטומט שלנו:



הערה

בעוד שאוטומט מכפלה מוכיח שתמיד יש פתרון ־ הוא בד"כ לא הפתרון הטוב ביותר. בד"כ אפשר למצוא אוטומט יותר קטן כשמנסים לבנות אותו ידנית.

תרגיל

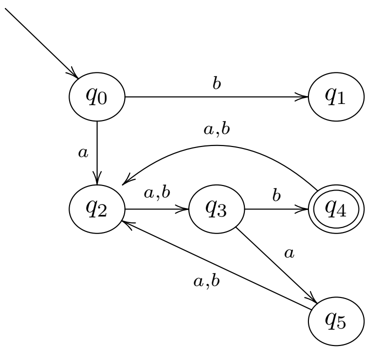
שפת המילים ה

1. פותחות בa
2. מסתיימות בb
3. ושאורכן מתחלק ב3

א. בנה אוטומט לקבלת השפה ־ ישירות

ב. בנה אוטומט מכפלה

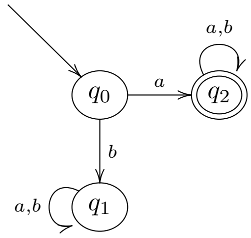
פתרון סעיף א



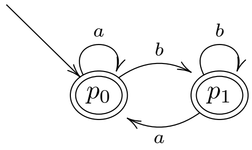
פתרון סעיף ב

יש לנו 3 שפות. נצייר כל אחת מהן בנפרד:

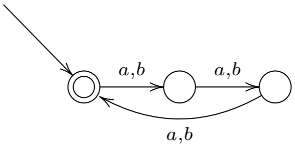
1



2



3



אם היינו רוצים לבנות אוטומט מכפלה לכל שלושת המצבים, היינו מקבלים $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$ מצבים, במקום ה6 שהצלחנו לבנות. זה קורה כי כשבונים ידנית, יש מצבים שאפשר לאחד או להשמיט.

תרגיל

$$L = \left\{a^{2m+3k} \middle| m, k \geq 0\right\}, \Sigma = \{a\}$$

פתרון

חוץ מ1, ניתן לבנות כל מספר טבעי בצורה $2m + 3k$:

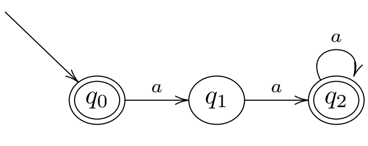
ניקח $k = 0$, ונקבל $a^0, a^2, a^3, \ldots$

ניקח $k = 1$, ונקבל $a^3, a^5, a^7, \ldots$

וביחד נקבל $\Sigma^* - \{a\} = a^0, a^2, a^3, a^4, a^5, \ldots$

לכן ניתן לכתוב את האוטומט בקלות:

$$L = \Sigma^* \setminus \{a\}$$



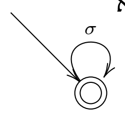
סגירות למשלים

אם L רגולרית, אז גם $\overline{L}$ רגולרית.

הוכחה

$$\overline{L}=\Sigma^*-L$$

- Σ^* שפה רגולרית ־ האוטומט שלה הוא



- L שפה רגולרית ־ נתון

לכן פעולה בינארית עליהן נותנת שפה רגולרית.

אבל בשביל לממש את זה, לא צריך אוטומט מכפלה. פשוט הופכים באוטומט של L כל מצב מקבל למצב לא מקבל, וכל מצב לא מקבל למצב מקבל.

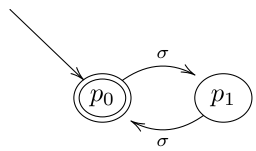
תרגיל

נתונה שפה רגולרית L. הוכח שהשפה החלקית לL המכילה את כל המילים מL באורך זוגי אף היא רגולרית.

פתרון

נתון שL רגולרית $\Leftarrow$ שקיים אוטומט המקבל אותה, A

L_2=שפת המילים באורך זוגי רגולרית ־ קיים לה אוטומט מקבל



לפי תכונת הסגירות של השפות הרגולריות $L_1=L\cap L_2$ רגולרית.

נרצה לתאר אוטומט שמקבל את L_1, אבל אנחנו לא יודעים איך נראית L, ולכן אנחנו לא יכולים לצייר את האוטומט של L_1. אבל ניתן לתאר את האוטומט של L_1 באופן פורמלי:

$$C=\left\langle Q_A\times\left\{p_0,p_1\right\},\Sigma,\left(q_{0A},p_0\right),\delta_C,F_A\times\left\{p_0\right\}\right\rangle$$

$$\delta_C\left(\left(q,p_0\right),\sigma\right)=\left(\delta_A\left(q,c\right),p_1\right)$$

$$\delta_C\left(\left(p,p_1\right),\sigma\right)=\left(\delta_A\left(q,c\right),p_0\right)$$

הערה

יכול להיות שהייתה בניה יותר יעילה לC מאשר אוטומט מכפלה ־ אבל בגלל שאנחנו לא מכירים את L, אנחנו לא יכולים לבנות אותו.