88-113.תרגיל 12:

3.3 תרגיל. יהא $V=\mathbb{C}^3$ עם מכפלה פנימית סטנדרטית. יהא $B=\{(i,i,i),(i,i,0),(i,0,0)\}$.

א. מצא בסיס דואלי $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ עבור V^*.

ב. מצא וקטור $v_0\in V$ כך ש $\varphi_1(v)=\langle v,v_0\rangle$ לכל $v\in V$.

תשובה

א. נשתמש בכך ש $\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}$ ובכך ש φ_i פונקציונל לינארי ולכן $\varphi_i(x,y,z)=a_ix+b_iy+c_iz$.

$$\varphi_1(i,i,i)=a_1i+b_1i+c_1i=1$$
$$\varphi_1(i,i,0)=a_1i+b_1i+0\cdot c_1=0$$
$$\varphi_1(i,0,0)=a_1i+0\cdot b_1+0\cdot c_1=0$$

נפתור את המערכת ונקבל $a_1=0,b_1=0,c_1=-i$. לכן $\varphi_1(x,y,z)=-iz$.

באופן דומה:

$$\varphi_2(i,i,i)=a_2i+b_2i+c_2i=0$$
$$\varphi_2(i,i,0)=a_2i+b_2i+0\cdot c_2=1$$
$$\varphi_2(i,0,0)=a_2i+0\cdot b_2+0\cdot c_2=0$$

ולכן $a_2=0,b_2=-i,c_2=i$, כלומר $\varphi_2(x,y,z)=-iy+iz$. לבסוף,

$$\varphi_3(i,i,i)=a_3i+b_3i+c_3i=0$$
$$\varphi_3(i,i,0)=a_3i+b_3i+0\cdot c_3=0$$
$$\varphi_3(i,0,0)=a_3i+0\cdot b_3+0\cdot c_3=1$$

ולכן $a_3=-i,b_3=i,c_3=0$, $\varphi_2(x,y,z)=-ix+iy$.

ב. נסמן $v=(x,y,z),v_0=(x_0,y_0,z_0)$. מצד אחד, $\varphi_1(v)=-iz$ ומצד שני, $\langle v,v_0\rangle=x\overline{x_0}+y\overline{y_0}+z\overline{z_0}$. אם השוויון $\varphi_1(v)=\langle v,v_0\rangle$ נכון לכל , הוא נכון בפרט עבור $v\in\{e_1,e_2,e_3\}$, נציב כל אחת מהאפשרויות ונקבל

$$0=\varphi_1(e_1)=\langle e_1,v_0\rangle=\overline{x_0}$$
$$0=\varphi_1(e_2)=\langle e_2,v_0\rangle=\overline{y_0}$$
$$-i=\varphi_1(e_3)=\langle e_3,v_0\rangle=\overline{z_0}$$

נשאר להסיק ש $v_0=(0,0,i)$.

3.4 תרגיל. נתון כי $B=\{1+2x,\ 2+3x\}$ הוא בסיס עבור $\mathbb{R}_1[x]$. מצא את הבסיס הדואלי $B^*=\{\varphi_1,\varphi_2\}$ ל B במפורש, כלומר חשב במפורש את $\varphi_1(a+bx)$ ואת $\varphi_2(a+bx)$.

תשובה

כנ"ל, כיוון ש φ_i לינארי: $\varphi_i(a+bx)=a\varphi_i(1)+b\varphi_i(x)$. כמו כן, אנו יודעים ש $\varphi_i(v_j)=\delta_{ij}$:

$$\varphi_1(1+2x)=1\cdot\varphi_1(1)+2\cdot\varphi_1(x)=1$$
$$\varphi_1(2+3x)=2\cdot\varphi_1(1)+3\cdot\varphi_1(x)=0$$

נפתור ונקבל $\varphi_1(1)=-3, \varphi_1(x)=2$, כלומר $\varphi_1(a+bx)=-3a+2b$.

$$\varphi_2(1+2x)=1\cdot\varphi_2(1)+2\cdot\varphi_2(x)=0$$
$$\varphi_2(2+3x)=2\cdot\varphi_2(1)+3\cdot\varphi_2(x)=1$$

נפתור ונקבל $\varphi_2(1)=2, \varphi_2(x)=-1$, כלומר $\varphi_2(a+bx)=2a-b$.

3.9 תרגיל. יהא V מרחב וקטורי עם בסיס $B=\{v_1, \dots, v_n\}$ ובסיס סטנדרטי S, ויהא $B^*=\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ הבסיס הדואלי המתאים. תהא P מטריצת המעבר המקיימת $P[v]_S=[v]_B$ לכל $v\in V$, כלומר $P=[I]_B^S$. הוכח: לכל i ולכל $v\in V$, $R_i(P)[v]_S=\varphi_i(v)$. לכן אפשר למצוא את $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ע"י כפל במטריצת המעבר P. (תזכורת: את המטריצה P קל לחשב: כותבים את הוקטורים v_i בעמודות, והופכים את המטריצה שהתקבלה.)

תשובה

ידוע ש $P=[I]_B^S=\left([e_1]_B,\dots,[e_n]_B\right)$. נסמן $[e_i]_B=\begin{bmatrix}\alpha_{1i}\\ \vdots\\ \alpha_{ni}\end{bmatrix}$, כך ש $P=\left\langle\alpha_{ij}\right\rangle_{n\times n}$. יהי $v=\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j$. מצד אחד,

$$R_i(P)[v]_S=(\alpha_{i1},\dots,\alpha_{in})\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j\ .$$

ומצד שני, $\varphi_i(v)=\varphi_i\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi_i(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi_i(e_j)$. כעת ניזכר ש $[e_j]_B=(\alpha_{1j},\dots,\alpha_{nj})^t$ ולכן $e_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}v_k$, מכאן נקבל,

$$\varphi_i(e_j)=\varphi_i\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}v_k\right)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}\varphi_i(v_k)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kj}\delta_{ik}=\alpha_{ij}$$

ולכן $\varphi_i(v)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\varphi_i(e_j)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j$. נסיק $R_i(P)[v]_S=\varphi_i(v)$.

3.12 תרגיל. בהמשך לתרגיל 3.9, הצג את הפונקציונל הלינארי $\varphi(x,y,z)=x-y-z$ כצירוף לינארי של אברי B^*.

תשובה

ראשית, נסמן ב $E^*=\{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ את הבסיס הדואלי של הבסיס הסטנדרטי ל R^3 .

אז, $\varphi(x,y,z)=x-y-z=\varphi_1(x,y,z)-\varphi_2(x,y,z)-\varphi_3(x,y,z)$ ולכן $[\varphi]_{E^*}=(1,-1,-1)^t$.

כעת, E הסטנדרטי ולכן עמודות מטריצת המעבר מ B ל E הן איברי B , כלומר:

$$[I]_E^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן מטריצת המעבר בין B^* ל E^* היא $\left(\left([I]_E^B\right)^{-1}\right)^t$ ומכך נסיק שמטריצת המעבר בין E^* ל B^* היא $\left(\left(\left([I]_E^B\right)^{-1}\right)^t\right)^{-1} = \left([I]_E^B\right)^t$, כלומר

$$[I]_{B^*}^{E^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

נשאר להסיק ש .

$$[\varphi]_{B^*} = [I]_{B^*}^{E^*} [\varphi]_{E^*} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ומכאן בנקל נקבל את φ כצירוף ליניארי של איברי B^* .

3.13 תרגיל. יהא $\varphi \in (\mathbb{R}^2)^*$ כך ש $\varphi(3,4)=5$ ו $\varphi(5,6)=7$. חשב את $\varphi(10,5)$:

א. ע"י הצגת $(10,5)$ כצירוף לינארי של $(3,4),(5,6)$.

ב. ע"י מציאת φ. [רמז: אפשר להיעזר בתרגיל קודם למציאת φ]

תשובה

א. נחשב ונמצא את מקדמי הצירוף הלינארי (ע"י פתרון מערכת משוואות):

$$(10,5) = 12.5 \cdot (5,6) - 17.5 \cdot (3,4)$$

נציב ב φ ונקבל:

$$\varphi(10,5) = \varphi\big(12.5\cdot(5,6) - 17.5\cdot(3,4)\big) = 12.5\cdot\varphi(5,6) - 17.5\cdot\varphi(3,4) =$$
$$= 12.5\cdot 7 - 17.5\cdot 5 = 0$$

ב.