אלגברה מופשטת - תרגיל 2

תאריך הגשה: 17.08.2011
ההגשה היא בתרגול בלבד!
אין דחייה בהגשה!

- על התרגיל יש לרשום: שם, תעודת זהות, שם המתרגל.
- יש להגיש את התרגיל **ללא** ניילוניות ו/או קלסרים! אלא בקובץ דפים מהודק מצד ימין!

<u>שאלה 1</u>

א) האם קיים מונומורפיזם מ- $GL_5(\mathbb{Q})$ ל-$(\mathbb{Q}^5,+)$? (כאשר-$\mathbb{Q}^5=\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$).

ב) האם קיים אפימורפיזם מ-$(M_5(\mathbb{Q}),+)$ ל-$(\mathbb{Q}^5,+)$?

<u>שאלה 2</u>

בדקו אם החבורות הבאות הן ציקליות (אם הן ציקליות, מצאו לפחות יוצר אחד. אם לא, הוכיחו זאת), ומצאו כמה יוצרים יש להן אם כן:

א) $\Omega_{101},\Omega_{102}$

ב) $\left\langle cis\frac{17\pi}{25}\right\rangle,\left\langle cis\pi\sqrt{3}\right\rangle$

ג) U_{20}

ד) $\mathbb{Z}_{10}\times\mathbb{Z}_{15}$

<u>שאלה 3</u>

א) יהיו $H,K\le G$ תת חבורות. נגדיר את הקבוצה $HK=\{hk:h\in H,k\in K\}$. הוכיחו: HK תת חבורה של G אם ורק אם $HK=KH$.

ב) הסיקו מסעיף א' כי אם N ת"ח נורמלית של G ו-H ת"ח של G אז HN ת"ח של G.

ג) הוכיחו כי אם N_1,N_2 תח"נ של G אז $N_1\cap N_2$ ו-N_1N_2 תח"נ של G.

<u>שאלה 4</u>

(1) תהי $\mathbb{Q}$ חבורת המספרים הרציונליים (עם פעולת החיבור), ותהי $\mathbb{Z}$ (חבורת המספרים השלמים) תת חבורה שלה.

א. הוכיחו שב- $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ כל איבר הוא מסדר סופי.

ב. הראו כי התת חבורה הנוצרת ע"י המחלקות של $\frac{1}{4}$ ו- $\frac{1}{6}$ היא ציקלית.

מהו הסדר של תת חבורה זו ?

(2) נתבונן ב- $G=GL_2(\mathbb{Q},\cdot)$ ובתת-החבורה $H=\left\{\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}:a\in\mathbb{Q}\right\}$. חשבו את $[G:H]$.

<u>שאלה 5</u>

א) תנו דוגמא לחבורה סופית G ותת-חבורה H המראות שההתאמה $Hx\to xH$ אינה בהכרח מוגדרת היטב.

ב) תנו דוגמא לחבורה (אינסופית) שיש לה תת קבוצה סגורה ביחס לפעולה, שאיננה תת חבורה.

<u>שאלה 6</u>

א) פתרו: $28^{301}x \equiv 2004 \pmod{99}$

ב) פתרו באמצעות משפט אוילר את המשוואה:

$9999x = 3737373737^{9999} + 2011 \pmod{40}$

ג) באמצעות משפט אוילר מצאו את 2 הספרות האחרונות של המספר $8073767^{1999} + 2011$

ד) הוכיחו או הפריכו: $70!+1$ מתחלק ב- 71, $116!+1$ מתחלק ב- 117.

ה) פתרו את המשוואה $a^3xb = ab^2ab$ בחבורה S_3 כאשר

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>שאלה 7</u>

תהי D_4 החבורה הדיהדרלית ויהיו $\sigma, \tau \in D_4$ (כאשר τ איבר מסדר 2 – שיקוף, ו- σ איבר מסדר 4 – סיבוב ב- 90 מעלות).

נגדיר את תתי החבורות הציקליות $H = \langle \tau \rangle$, $K = \langle \sigma^2 \rangle$.

א) כתבו במפורש את אברי תתי החבורות H, K וחשבו את $[D_4 : H], [D_4 : K]$.

ב) כתבו את המחלקות השמאליות של H, K ב- D_4. האם הן תת חבורות נורמליות?

<u>שאלה 8</u>

תארו את הקוסטים השמאליים של חבורה G לגבי ת"ח H:

א. $G = 4\mathbb{Z}, H = 12\mathbb{Z}$

ב. $G = \mathbb{R}^2, H = \{(t,3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$

ג. $G = X_1 \times X_2, H = X_1 \times \{e\}$ (X_1, X_2 חבורות)

ד. $G = U_{20}, H = <\overline{11}>$.

<u>שאלה 9</u>

א) תהי D_4 החבורה הדיהדרלית. חשבו את טבלת הכפל שלה.

ב) מהו $Z(D_4)$? הוכיחו. (באשר $Z(G)$ הוא המרכז של החבורה G)

<u>שאלה 10</u>

הוכיחו שהפונקציות הבאות הן הומומורפיזמים ומצאו אם הן חח"ע ו/או על:

א) $f : (\mathbb{C}^*, \cdot) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x) = x^5$

ב) $f : (\mathbb{Q}^*, \cdot) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ המוגדרת ע"י: $f(x) = x^5$

ג) $f:\mathbb{Z}_6 \to G$ באשר $G=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \mid a,b,c\in\mathbb{Z}_3\right\}$ והפונקציה מוגדרת ע"י

$$x \to \begin{pmatrix}1 & 0 & x\ (\mathrm{mod}\ 3)\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

<u>שאלה 11</u>

בתרגיל בית הקודם, בשאלה 4, הוכחתם כי $G=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix} \mid a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$ חבורה.

הוכיחו כי $G\cong\mathbb{C}^*$.

<u>שאלת בונוס</u> (10 נק')

הגדרה: חבורה G היא פשוטה אם אין לה ת"ח נורמליות לא-טריוואליות.

נתון כי $G_1\subseteq G_2\subseteq G_3\subseteq ....$ חבורות פשוטות. הוכיחו כי $G=\bigcup_n G_n$ חבורה פשוטה.

בהצלחה!