

**בחינת סיום (מועד ב') בקורס**  
**מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**  
 מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.  
 חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

א. תהי  $G$  חבורה. נגדיר יחס שקילות על איברי  $G$  בצורה הבאה:  $x \sim y$  אם ורק אם קיים  $z \in G$  כך ש-  $x = z^{-1}yz$  (זהו יחס ההצמדה). יהי  $x \in Z(G)$  (כלומר, איבר במרכז של  $G$ ). כמה איברים יש במחלקת השקילות  $[x]$ ?

ב. האם קיימת חבורה  $G$  בת 21 איברים ואיבר  $x \in G$  כך שבמחלקת השקילות  $[x]$  יש בדיוק שישה איברים? [יחס השקילות הוא אותו יחס כמו בסעיף א']

שאלה 2

א. תהי  $G$  חבורה ותהיינה  $G_1, G_2$  תתי חבורות שלה. הוכיחו כי  $G_1 \cup G_2$  הוא תת חבורה של  $G$  אם ורק אם אחת מ-  $G_1, G_2$  מוכלת בשנייה.

ב. הוכיחו כי החבורה  $Z_k \times Z_k$  (עם פעולת חיבור מודולו  $k$  בכל רכיב) אינה ציקלית. תנו דוגמא לחבורה מהסוג  $Z_k \times Z_m$  שהיא כן ציקלית.

שאלה 3

א. הוכיחו כי בחוג עם חילוק אין מחלקי אפס.  
 ב. תנו דוגמא לחוג עם חילוק שאינו שדה.

שאלה 4

א. יהיו  $a, n$  מספרים טבעיים זרים. הוכיחו כי לכל  $0 \leq b < n$ , קיים פתרון יחיד  $0 \leq x < n$  למשוואה  $ax = b \pmod{n}$ .

ב. יהי  $F[x]$  חוג הפולינומים עם מקדמים בשדה  $F$ , ויהי  $I$  אידאל של  $F[x]$ . הוכיחו כי קיים פולינום  $f$  כך ש-  $I = \{f \cdot g : g \in F[x]\}$  (כלומר,  $I$  הוא אוסף כל הפולינומים שמתחלקים ב-  $f$ ).

שאלה 5

א. יהי  $F$  שדה סופי. נסמן ב-  $0$  את איבר היחידה החיבורי שלו, וב-  $1$  את איבר היחידה הכפלי שלו.

נסמן ב-  $\text{char}(F)$  את המספר הקטן ביותר  $n$  כך ש-  $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_n = 0$  (כלומר, סכום של  $n$  עם עצמו  $n$  פעמים שווה ל-  $0$ ). הוכיחו כי  $\text{char } F$  הוא מספר ראשוני.

ב. נתבונן בשדה  $F = \mathbb{Z}_2[x] / \langle x^5 + x^2 + 1 \rangle$ . יהי  $z = [x^3 + x^2 + 1] \in F$ . הוכיחו כי  $z$  הוא יוצר של החבורה הכפלית של השדה  $F$ .