

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 מרצים: מר שי סרוסי וד"ר אלי בגנו.
סמסטר קיץ תשס"ח – מועד א. אלול תשס"ח
משך המבחן: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

במבחן שני חלקים. בחלק הראשון עליכם לענות על 2 שאלות מתוך 3. משקל כל שאלה 20 נקודות. שימו לב: ההוכחות בחלק זה חייבות להיות מתמטיות. אין לספר סיפורים.

בחלק השני עליכם לצבור 60 נקודות (מתוך 76 אפשריות). פעלו לפי ההנחיות בגוף השאלות.

כל התשובות בדפים. המחברת משמשת לטיוטה בלבד.

סימונים: $N = \{1,2,3,\dots\}$.

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 1

יהיו A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו בלי שימוש בטבלאות אמת כל אחת מן הטענות הבאות:

א. אם $A \not\subseteq B \cap C$ אז $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) \neq \emptyset$. (6 נקודות).

ב. אם $A \subseteq B$ אז $A \cup (B - A) = B$. (6 נקודות).

ג. אם $A \cap B = \emptyset$ אז $P(A) \cap P(B) = \{\emptyset\}$. (8 נקודות).

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 2

מהו מספר התוצאות האפשריות להטלת 10 קוביות שונות (לכל קוביה 6 פאות הממוספרות מ-1 עד 6), כך שסכום התוצאות הוא 25?

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 3

1. בהנתן קבוצה A , נגדיר פונקציה $f : A \rightarrow P(P(A))$ ע"י $f(a) = \{B \mid B \subseteq A, a \in B\}$.

לדוגמא, אם $A = \{1,2\}$ אז $f(1) = \{\{1\}, \{1,2\}\}$.

הוכח או הפרך:

א. f היא חד-חד ערכית. (5 נקודות).

ב. f היא על. (5 נקודות).

2. בהנתן קבוצה A , נגדיר פונקציה $f : P(A) \rightarrow P(P(A))$ ע"י $f(X) = \{B \mid B \subseteq A, X \subseteq B\}$.

לדוגמא: אם $A = \{1,2,3\}$ אז $f(\{1,2\}) = \{\{1,2\}, \{1,2,3\}\}$.

א. מצא את $f(\emptyset)$. (2 נקודות).

הוכח או הפרך:

ב. f היא חד-חד ערכית. (4 נקודות).

ג. f היא על. (4 נקודות).

חלק ב'

בחלק זה עליכם לענות לפי ההנחיות בגוף השאלה.

שאלה 4 (10 נקודות)

רשום נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה מספיקים לתיאור מספר תתי הקבוצות של $\{1, \dots, n\}$ שאינן מכילות שני מספרים עוקבים. למשל, תתי הקבוצות של $\{1, 2\}$ המקיימות תכונה זו הן: $\emptyset, \{1\}, \{2\}$. אין צורך להסביר. רשום את הנוסחא ואת תנאי ההתחלה בלבד.

שאלה 5 (כל סעיף שווה 5 נקודות).

תהינה A, B קבוצות סופיות כך ש $|A| = 9, |B| = 12$.

ענה על הסעיפים הבאים תשובה סופית בלבד

- (א) כמה יחסים שונים ניתן להגדיר מעל A ? _____
- (ב) כמה פונקציות יש מ A ל B ? _____
- (ג) כמה פונקציות חד חד ערכיות יש מ A ל B ? _____
- (ד) כמה פונקציות שהן חד חד ערכיות ועל יש מ A ל B ? _____
- (ה) כמה יחסי שקילות מעל A מקיימים את התנאי הבא: "כל מחלקות השקילות הן בעלות 3 איברים בדיוק" ? (רמז: חשבו על הקשר בין יחסי שקילות לחלוקות).
-

שאלה 6

תהי A קבוצה אינסופית. נסמן:

$|A| = \kappa, B = \{X \mid X \subseteq A\}, F = \{f \mid f: A \rightarrow P(A)\}, C = \{f \mid f: A \rightarrow P(A)\}$ קבוצת כל היחסים מ- A ל- B ,

$H = \{f \mid f: B \rightarrow B\}$.

א. העוצמה של C היא: (הקיפו את התשובה היחידה הנכונה) (4 נקודות)

1. $\kappa^2 + \kappa$

2. 2^κ

3. $\kappa \cdot \kappa$

4. 2^{2^κ}

5. 2^{κ^κ}

ב. $|F \times H| =$ (הקיפו את התשובה היחידה הנכונה) (4 נקודות)

1. $\kappa!$

2. $2^\kappa \cdot 2^\kappa$

3. $\kappa^2 \cdot 2^\kappa$

4. 2^{2^κ}

5. $\kappa! \cdot 2^\kappa$

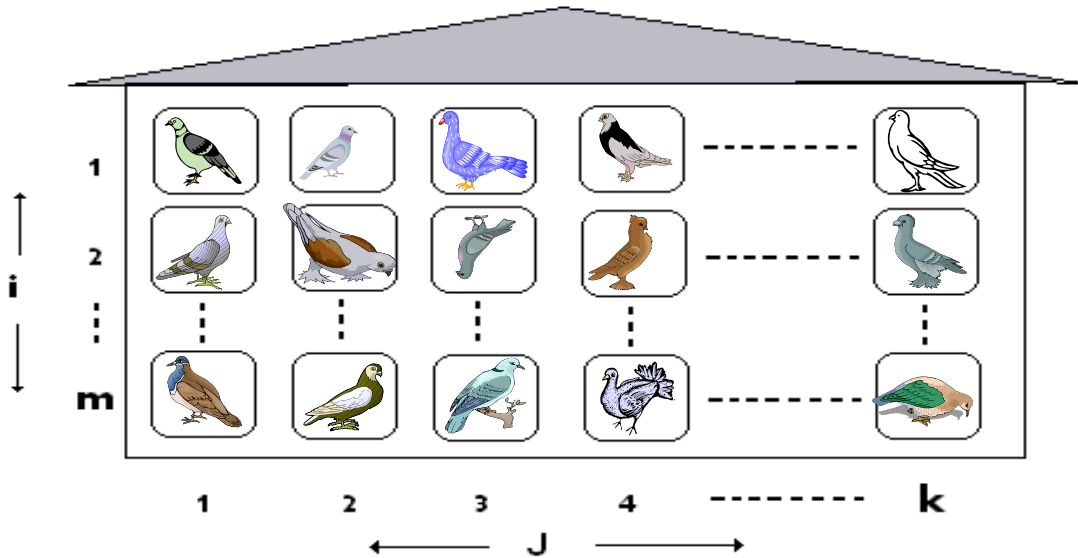
ג. מהי עוצמת הקבוצה הבאה $\{R \mid \text{יחס שקילות על } N \text{ ו- } |N/R| = 2\}$, כלומר עוצמת קבוצת כל יחסי השקילות (על N) בעלי שתי מחלקות שקילות. _____

(תשובה סופית בלבד).

(8 נקודות)

שאלה 7 (25 נקודות) (כל סעיף שווה 5 נקודות)

בחצר יש שובך יונים בן m קומות כאשר בכל קומה k תאים. בכל תא בשובך יש מקום בשביל יונה אחת בלבד. כל תא בשובך ניתן לתאור ע"י האינדקסים (i, j) כאשר $1 \leq i \leq m$ ו $1 \leq j \leq k$. בתוך השובך מסודרות $n = m \cdot k$ יונים **שונות**, ראו ציור:



הערה: השתמשו בביטוי $CD(n)$ בשביל לבטא את מספר הפרות הסדר (כלומר מספר התמורות שהן אי סדר מלא) של n עצמים שונים, מבלי לכתוב את הביטוי המפורש לכך. ענו על הסעיפים הבאים.

א. נתון שמספר הקומות m הוא 2. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שאף יונה לא תמצא בקומתה המקורית? _____ (תשובה סופית בלבד)

בסעיפים הבאים מספר הקומות m הינו גדול מ-2. כמו כן יונים הנמצאות באותה קומה בשובך תקראנה "שותפות לקומה".

ב. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שיונים שהיו "שותפות לקומה" בסידור המקורי תשארנה "שותפות לקומה" בסידור החדש? (היונים רשאיות אך אינן חייבות להשאר בקומתן המקורית). _____ (תשובה סופית בלבד)

ג. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שיונים שהיו "שותפות לקומה" בסידור המקורי תשארנה "שותפות לקומה" בסידור החדש, אך אף יונה לא תשאר בקומתה המקורית? _____ (תשובה סופית בלבד)

ד. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך ששלושת התנאים הבאים מתקיימים:

1. יונים שהיו "שותפות לקומה" בסידור המקורי תשארנה "שותפות לקומה" בסידור החדש.
2. אף יונה לא תשאר בקומתה המקורית.
3. אף יונה לא תשאר במקומה המקורי בשורה (דהיינו האינדקס j של מקום היונה חייב להשתנות).

_____ (תשובה סופית בלבד)

ה. בכמה דרכים ניתן לסדר מחדש את היונים כך שכל יונה תשמור על מקומה המקורי בשורה (האינדקס j ישמר), אבל אף יונה לא תשאר בקומתה המקורית?
(תשובה סופית בלבד)

בהצלחה!!!