בוחן במתמטיקה בדידה 88-195 - תש"פ (פתרון)

שאלה 1.

א. הוכיחו או הפריכו כי הפסוק הלוגי הבא:

$$(\forall x \exists y\, \mathrm{W}(x,y)) \;\to\; (\exists x \forall y (\mathrm{W}(x,y)))$$

מהווה טאוטולוגיה לכל יחס W דו-מקומי, כאשר $x, y \in \mathbb{Z}$.

ב. הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: $A \subseteq B \times C$ לא ריקה. $\Leftrightarrow$ קיימות קבוצות: $A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq C$ לא ריקות, כך ש: $A \supseteq A_1 \times A_2$.

פתרון.

א. הפרכה: עבור שני שלמים x, y נאמר כי $x\,\mathrm{W}\,y$ אם ורק אם $x = y$. כעת נראה כי הרישא הינה נכונה עבור היחס W הנ"ל אבל הסיפא לא נכונה. רישא: יהי x שלם נבקש למצוא y שלם כך ש $x\,\mathrm{W}\,y$ נבחר $y = x$ ולכן לפי בחירת היחס הדו-מקומי W מתקיים; $x\,\mathrm{W}\,y$, לכן הרישא נכונה. סיפא: יהי $x \in \mathbb{Z}$ כלשהו, ונניח בשלילה כי הפסוק נכון עבור אותו x. כלומר לכל $y \in \mathbb{Z}$ מתקיים; $x\,\mathrm{W}\,y$ בפרט נוכל להסתכל על שני המספרים $0, 1$ שהם שלמים ומהנחת השלילה נקבל כי $x\,\mathrm{W}\,0$ וגם $x\,\mathrm{W}\,1$. לפי בחירת היחס W נקבל סה"כ: $1 = x = 0$ כלומר, $1 = 0$. זוהי סתירה.

ב. הוכחה:

"$\Leftarrow$" יהי A, B, C קבוצות. נניח כי $A \subseteq B \times C$ לא ריקה, נבקש להראות כי קיימות קבוצות: $A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq C$ לא ריקות, כך ש: $A \supseteq A_1 \times A_2$. מכיוון ש $A \subseteq B \times C$ ולא ריקה קיים $a \in A$ כך ש-$a \in B \times C$. מהגדרת מכפלה קרטזית נוכל לומר כי קיימים $x \in B$ ו-$y \in C$ כך ש:$a = (x, y)$. כעת נבחר, $A_1 = \{x\}\,, A_2 = \{y\}$. מבחירת x, y נקבל כי- $A_1 \subseteq B\,, A_2 \subseteq C$ ובנוסף:

$$A_1 \times A_2 = \{(x, y)\} \subseteq A$$

כדרוש.

"$\Rightarrow$" נתון כי $A \subseteq B \times C$ ונניח כי-קיימות קבוצות: $A_1 \subseteq B, A_2 \subseteq C$ לא ריקות, כך ש: $A \supseteq A_1 \times A_2$. נראה כי A לא ריקה. מכיוון ש A_1, A_2 לא ריקות קיימים $x \in A_1\,, y \in A_2$, ולכן:

$$(x, y) \in A_1 \times A_2 \subseteq A$$

לפי ההנחה. בפרט קיבלנו כי קיים איבר ((x, y)) ב-A ולכן לא ריקה. כדרוש.

שאלה 2. תהי $\mathfrak{U}$ קבוצה אוניברסלית. עבור מספר m טבעי וקבוצות $A_1, A_2, \cdots, A_m \subseteq \mathfrak{U}$ נגדיר את הקבוצה הבאה:

$$\mathbf{X} := \{X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m \mid \forall 1 \le i \le m (X_i = A_i) \vee (X_i = \mathfrak{U} \setminus A_i)\}$$

א. הראו כי עבור $B_1 \neq B_2 \in \mathbf{X}$ מתקיים: $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

ב. חשבו ,והוכיחו כי החישוב נכון, את: $\bigcup \mathbf{X}$

פתרון:

א. יהי $B_1 \neq B_2 \in \mathbf{X}$ יש להראות כי $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. מכיוון ש $B_1, B_2 \in \mathbf{X}$ מתקיים:

$$B_2 = \bigcap_{i=1}^m Y_i\,, B_1 = \bigcap_{i=1}^m X_i$$

עבור $\{X_i, Y_i\} = \{A_i, A_i^c\}$ לכל $1 \leq i \leq m$. אבל, מכיוון ש-$B_1 \neq B_2$ קיים $i^* \leq m$ כך ש-$Y_{i^*} \neq X_{i^*}$ ולכן נקבל כי $X_{i^*} = (Y_{i^*})^c$. נחשב:

$$B_1 \cap B_2 = X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_m \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_m \subseteq X_{i*} \cap Y_{i^*} \subseteq \emptyset$$

סיימנו.

ב. נראה בעזרת הכלה דו-כיוונית כי $\cup \mathbf{X} = \mathcal{U}$:

($\subseteq$) יהי $x \in \bigcup \mathbf{X}$ נרצה להראות כי $x \in \mathcal{U}$. אבל מהגדרת איחוד נובע כי קיים Y ב$\mathbf{X}$ כך ש $x \in Y$ לכן, מהגדרת $\mathbf{X}$ נובע כי $x \in A_0$ או $x \in (A_0)^c$. בכל מקרה, קיבלנו כי $x \in \mathcal{U}$ מאוניברסליות של $\mathcal{U}$.

($\supseteq$) יהי $x \in \mathcal{U}$ נשים לב כי לכל $i \leq n$ מהתכונה: $A_i \cup (A_i)^c = \mathcal{U}$ נובע כי לכל $i \leq n$: $x \in A_i \vee x \in (A_i)^c$. נסמן את הקבוצה הבאות:

* $C_0 = \{i \leq n \colon x \in A_i\}$
* $C_1 = \{i \leq n \colon x \in (A_i)^c\}$

תת טענה: C_0, C_1 זרות, $C_0 \cup C_1 = m + 1 \setminus \{0\}$.
נניח בשלילה כי קיים $x \in C_0 \cap C_1$ אזי מתקיים מהגדרת C_0, C_1 כי $x \in A_0$ וגם $x \in A_0^c$. אבל, $A_0 \cap A_1^c = \emptyset$ סתירה. נראה כעת כי $C_0 \cup C_1 = m + 1 \setminus \{0\}$. מספיק להראות כי לכל $1 \leq i \leq m$ $i \in C_0$ או $i \in C_1$. יהי i כדלקמן, מכיוון ש$x \in \mathcal{U}$ נקבל כי $x \in A_i$ או $x \in A_i^c$ כפי שצויין בהבחנה להעיל. מכאן נובע כי $i \in C_0$ או $i \in C_1$ בהתאמה. הוכחת התת-טענה הסתיימה.
נגדיר את האיבר הבא:

$$Y := \bigcap_{i \in C_0} A_i \cap \bigcap_{i \in C_1} (A_i)^c$$

מהגדרת C_0, C_1 ברור כי $x \in Y$. נראה כי Y נמצא ב-$\mathbb{X}$ ונסיים. ראשית נשים לב ש Y נראה בעצם מהצורה $Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots Y_m$, עבור $1 \leq i \leq m$ אם $i \in C_0$ אזי $Y_i = A_i$ אחרת, $i \in C_1$ מתת הטענה ולכן-$Y_i = A_i^c$. מכאן נובע כי $Y \in \mathbf{X}$ ההוכחה הסתיימה.

שאלה 3. נסתכל על הטבלה הבאה:

0	1	2	3	4	5	6
2	3	5	1	6	0	4

יהי $n, m < 7$. נאמר כי קיים הילוך בין n ל-m בטבלה אם ורק אם קיימת סדרה של טבעיים $(a_0, a_1, \cdots, a_t)$, כך ש: $a_0 = n$, $a_t = m$ וגם לכל $0 \leq i < t$: a_{i+1} הוא המספר שנמצא בטבלה מתחת למספר a_i.

דוגמא. נסתכל על הטבלה הבאה:

0	1	2	3
1	3	2	0

נשים לב למשל כי קיים הילוך בין 1 ל-0: ניקח $t = 2$ ונסמן $a_0 = 1, a_1 = 3, a_2 = 0$ ניתן לראות כי עבור 1 המספר 3 נמצא בטבלה מתחתיו וגם עבור 3 המספר 0 נמצא מתחתיו, לכן סך הכל קיבלנו הילוך בין 1 ל-0.

כעת, נגדיר יחס E על הקבוצה 7 באופן הבא: בהינתן $n, m < 7$ נאמר כי $(n, m) \in \mathrm{E}$ אם ורק אם קיים הילוך בין n לm בטבלה.

א. הראו כי E יחס שקילות על 7.

ב. חשבו במפורש את קבוצת המנה: $7 / _{\mathrm{E}}$.

פתרון.

א. בשביל להראות כי E יחס שקילות יש להראות: רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות. נתחיל ברפלקסיביות:
יהי $a \in 7$ יש להראות כי מתקיים $a \mathrm{E} a$ כלומר למצוא הילוך מa ל-a. נסתכל על ההילוך המקסימלי (ביחס לאיברים שונים בסדרה) שמתחיל ב-a; $(a_0, \cdots, a_t)$ (הערה: מכיוון שהטבלה סופית נוכל לעשות זאת).
כעת, נראה כי בטבלה מתחת לa_t מופיע a ובזה נסיים מכיוון שנקבל הילוך בין a ל-a. נניח כי מתחת לa_t מופיע $a \neq b$. אם $b = a_i$ עבור $0 < i \leq t$ מכיוון שעבור i כנ"ל- a_i הופיע בשורה השניה של הטבלה לפי הגדרת ההילוך נקבל כי a_i מופיע בטבלה בשורה השניה פעמיים, לפי הטבלה דבר זה לא ייתכן ולכן; $b \neq a_i$ לכל $0 < i \leq t$.קיבלנו b מספר ששונה מכל איברי הסדרה שלפניו ובנוסף אם נסתכל על הסדרה: $(a_0, \cdots a_t, b)$ נקבל הילוך לפי הגדרה כי הנחנו ש b נמצא מתחת ל-a_t בטבלה והשאר כבר היה הילוך. אבל, זוהי סתירה למקסימליות של ההילוך שלקחנו שמתחיל ב a. סיימנו. (נשים לב שבעצם הראינו כי ההילוך שמתחיל ב a הוא מעגלי, נשתמש בכך בהמשך).

כעת נראה סימטריות: יהי $a, b \in 7$ כך שמתקיים $a \mathrm{E} b$ צריך להראות: $b \mathrm{E} a$.יהי $(a, \cdots, b)$ ההילוך בין a ל-b. אם מתחת ל-b קיים מספר b_1 השונה מכל האיברים שלפניו נגדיר את הסדרה: $(a, \cdots, b, b_1)$. באופן דומה נסתכל על האיבר שנמצא בטבלה מתחת ל-b_1 נסמנו b_2 אם שונה מכל האיברים בסדרה החדשה נרחיב לסדרה: $(a_0, \cdots, b, b_1, b_2)$. נמשיך באופן דומה אך נשים לב כי התהליך חייב להיעצר (מכיוון שהטבלה סופית), בכל שלב הסדרה היא הילוך. סה"כ קיבלנו הילוך: $(a, \cdots, b, b_1, b_2, \cdots b_{t'})$ מקסימלי (ביחס לאיברים שונים), מכיוון שאם לא יכולנו להמשיך בתהליך.סה"כ עד כה התחלנו מהילוך בין a ל-b והרחבנו אותו להילוך מקסימלי המתחיל בa.כעת כמו בטיעון של רפלקסיביות נקבל כי האיבר שנמצא מתחת ל-$b_{t'}$ הוא a ולכן אם נסתכל על תת הסדרה: $(b, b_1, b_2, \cdots, b_{t'}, a)$ נקבל הילוך, זהו תת הילוך של ההילוך שבנינו , בין b ל-a. כדרוש.

נסיים בטרנזיטיביות: יהי $a, b, c \in 7$ כך ש-$a \mathrm{E} b$ וגם $b \mathrm{E} c$, צריך להראות כי: $a \mathrm{E} c$. מההנחה ש-$a \mathrm{E} b$ מתקיים קיים הילוך; $(a, a_1, \cdots a_{t_1} = b)$ מ-a ל-b.

מההנחה ש-$b \mathrm{E} c$ מתקיים קיים הילוך; $(b, b_1, \cdots b_{t_2} = c)$ מ-b ל-c. כעת נרכיב את שני ההילוכים באופן הבא: $(a, a_1, \cdots b, b_1, \cdots c)$ ונראה כי זהו הילוך. ראשית לכל $0 < i \leq t_1$ מתקיים כי a_i נמצא בטבלה מתחת ל-a_{i-1} מכיוון ש-$a \mathrm{E} b$. עבור $t_1 + 1 \leq i < t_2$ מתקיים: b_i נמצא בטבלה מתחת ל-b_{i+1} מכיוון ש- $b \mathrm{E} c$, לכן קיבלנו הילוך בין a ל-c ומכאן $a \mathrm{E} c$ כדרוש. סה"כ הראינו רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטביות של היחס ולכן זהו יחס שקילות.

ב. נראה כי:

$$7 \diagup_{\mathrm{E}} = \{\{0, 2, 5\}, \{1, 3\}, \{4, 6\}\}$$

כיוון שההילוך המקסימלי שמתחיל באיבר a הינו מעגלי בהמשכו כל האיברים ששקולים E לאיבר הנ"ל נמצאים כבר בהילוך המקסימלי נראה זאת: יהי $b \in 7$ ששקול ל a. נבקש להראות כי b הוא איבר בהילוך המקסימלי שמתחיל ב-a. יהי $(a, a_1, \cdots a_t)$ ההילוך המקסימלי הנ"ל, מכיוון ש-b שקול ל-a מההנחה קיים הילוך בין a ל-b: $(a, a'_1, \cdots a'_{t'} = b)$ אבל, נשים לב כי מכיוון שמתחת לכל איבר בטבלה נמצא איבר יחיד האיברים a'_i עבור $i \leq t'$ ולכן: $a_i = a'_i$ לכל $i \leq t'$. כלומר קיבלנו כי ההילוך בין a ל- b הוא תת הילוך של ההילוך המקסימלי. מכאן נובע כי קיים $i \leq t$ כך ש- $b = a_i$. כדרוש.

לכן נוכל לחשב את מחלקת השקילות של a על ידי הסתכלות על ההילוך המקסימלי וקריאת האיברים עליו:

(1) $[0]_{\mathrm{E}} = \{0, 2, 5\}$ ההילוך המקסימלי האחראי הוא: $(0, 2, 5)$. (יש להראות כי זהו אכן הילוך)
(2) $[3]_{\mathrm{E}} = \{1, 3\}$ הילוך מקסימלי אחראי הוא: $(3, 1)$

(3) $\{4,6\}=[4]_{\mathrm{E}}$ הילוך מקסימלי אחראי הוא : $(4,6)$

נשים לב כי אלה כל מחלקות השקילות מההערה להעיל וכיוון שכל איבר נמצא באחת מבין מחלקות השקילות הנ"ל.

שאלה 4. תהי (A,R) קבוצה סדורה חלקית (במובן החלש). נגדיר יחס חדש S על A באופן הבא: בהנתן $a,b\in A$;

$$a\,\mathrm{S}\,b \;\Leftrightarrow\; (a\,\mathrm{R}\,b)\vee(b\,\mathrm{R}\,a)$$

האם היחס שעכשיו הגדרנו S הינו יחס שקילות?

פתרון. לא. נסתכל על הזוג הסדור הבא: $(\mathcal{P}(3),\subseteq)$, ראינו בכיתה כי זוהי קבוצה סדורה חלקית במובן החלש. כעת, נשים לב כי למשל $\{1\}\,\mathrm{S}\{1,2\}$ וגם $\{2\}\,\mathrm{S}\{1,2\}$ היות ו-$\{1\},\{2\}\subseteq\{1,2\}$. אבל, $\{2\}\not\subseteq\{1\}$ וגם $\{1\}\not\subseteq\{2\}$ ולכן לא מתקיים $\{1\}\,\mathrm{S}\{2\}$. כלומר קיבלנו במקרה הנ"ל כי S אינו טרנזיטיבי, ולכן הוא אינו יחס שקילות.