שאלות חזרה – מבוא להסתברות וסטטיסטיקה (88165) – עינת אביאל

שאלה 1

בכדי לאמוד את אחוז הגירושין בארה"ב, נלקח מדגם מקרי של 800 איש ונמצא כי 280 גרושים.

א. בנה רו"ס לאחוז הגירושין ברמת ביטחון של 95% .

ב. מה גודל המדגם הדרוש ע"מ להקטין את אורך הרווח פי 2 ?

שאלה 2

אוניברסיטה פרסמה נתונים על הרישום לפקולטות שונות לפי מין:

	מדעי הרוח	מדעי החברה	מדעי הטבע	משפטים	סה"כ
בנים	300	700	210	200	1410
בנות	700	700	90	100	1590
סה"כ	1000	1400	300	300	3000

האם יש קשר בין מין לפקולטה בה נוטים ללמוד בר"מ 0.05 ?

שאלה 3

לפי המודל הגנטי כשמכליאים פרחים אדומים ולבנים יש סיכוי של רבע לקבל פרחים אדומים, סיכוי של רבע לקבל פרחים לבנים וסיכוי חצי לקבל פרחים ורודים.

אם בניסוי התקבלו 32 פרחים אדומים , 30 לבנים ו- 38 ורודים. האם ניתן לומר כי המודל הגנטי מתקיים פה?

שאלה 4

לפניך נתונים על גובה באינצ'ים של צמחי קקטוס שהורכבו בתנאי סביבה מבוקרים:

8	6	5	4	2	1	X=מספר שבועות אחרי ההרכבה
18.3	9.4	7.3	5.1	2.4	2.0	Y=גובה באינצ'ים

א. האם ניתן לדבר על קשר ליניארי בין גובה הצמח למספר השבועות שעברו מאז ההרכבה?

ב. מהו גובה הצמח הצפוי לאחר 7 שבועות?

ג. באיזה שבוע יגיע הגובה ל-30 אינץ'?

שאלה 5

לפניך נתונים על שאריות כלור בבריכת שחייה, מספר שעות לאחר הכנסתו לבריכה.

X=מספר שעות	2	4	6	8	10	12
Y=שאריות כלור	1.8	1.5	1.4	1.1	1.1	0.9

(ביחס למיליון יחידות)

א. בצע מבחן לבדיקת קיום קשר ליניארי בין מספר השעות שעברו מאז הכנסת הכלור וכמות הכלור שנותרה בבריכה.

ב. מהי כמות הכלור הצפויה אחרי 15 שעות?

ג. אחרי כמה שעות תרד כמות הכלור ל-0.1?

הסתברות מותנה ואי תלות, נוסחת הכפל, נוסחת הסתברות השלמה ובייס

- **הסתברות מותנה:** A ו-B שני מאורעות: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- **אי תלות:** $P(A|B)=P(A), \quad P(A\cap B)=P(A)P(B)$
- **חוק הכפל:**

$$P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k)=P(A_1)P(A_2\,|\,A_1)P(A_3\,|\,A_1\cap A_2)\cdots P(A_n\,|\,A_1\cap\cdots\cap A_{n-1})$$

כאשר: $\forall k=1...n-1$, $P(\bigcap_{i=1}^{k} A_i)>0$, A_k מאורעות.

- **נוסחת ההסתברות השלמה:** $P(A)=\sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k)$

כאשר: $i\neq j:$ $\sum_{k=1}^{n} P(B_k)=1, \quad B_i\cap B_j=\phi$

- **נוסחת בייס:** $P(A|B)=\dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
- **הכלה והדחה:**

$$P(A\bigcup B\bigcup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\bigcap B)-P(B\bigcap C)+P(A\bigcap B\bigcap C)$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1}\sum_{possible\ \ k's} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)\right]$$

שאלה 1:

אביה של רובי מציע לה שתי קופסאות זהות: באחת שני יהלומים יקרים ואבן אחת פשוטה, השנייה עם שתי אבנים פשוטות ויהלום יקר אחד. רובי איננה יודעת מה נמצא באיזו קופסה. למען ההגינות מרשה לה אביה להוציא אבן אחת מקופסה שנבחרה על ידה באקראי, ואז להחליט אם להשאיר בידה אותה קופסה או לקחת את השנייה (אחרי כמובן שהחזירה את האבן שבחרה לקופסה שלה). רובי נוקטת במדיניות הבאה: אם האבן שהוציאה היא יהלום – היא משאירה את הקופסה, אחרת מחליפה אותה. מה הסיכוי שרובי תקבל 2 יהלומים כמתנת חתונה?

שאלה 3:

10 ילדים (ביניהם א' ב' ו-ג') מסתדרים במעגל באופן אקראי. ברגע מסוים מחליט כל אחד מן הילדים באקראי (ובה"ת בשאר) אם לעמוד או לשבת.

א) מהי ההסתברות שכל עומד נמצא בין שני יושבים וכל יושב נמצא בין שני עמודים?
ב) אם בדיוק 5 ילדים החליטו לשבת, מהי ההסתברות שלפחות 4 מהם נמצאים זה לצד זה (ארבעתם ברצף)?
ג) מהי ההסתברות שא' לא רוקד לצד ב' ולא לצד ג'?

שאלה 5:

שליש ממכשירי הטלפון הם מסוג בעל סיכוי הצלחה בחיוג של 90% והיתר מסוג בעל הצלחה של 80%, כולם זהים במראה. במכשיר הנבחר באקראי, המשתמש טעה בחיוג פעם אחת בעשר השיחות הראשונות. בהינתן מידע זה-

א. מה הסיכוי שיטעה בחיוג הבא?
ב. מה הסיכוי שבידיו מכשיר מן הסוג הראשון?

שאלה 6:

בקבוצה S יש n עצמים שונים. שני אנשים בוחרים באופן מקרי ובלתי תלוי תת קבוצות של S (לכל תת קבוצה יש הסתרות של $\frac{1}{2^n}$ להיבחר). נסמן ב-A וב-B.

א. מה הסיכוי לכך שב-A k עצמים?
ב. מה הסיכוי לכך ש- $A \subseteq B$?

שאלה 7:

א) ליאת ומיכל מטילות 2n מטבעות כל אחד. מהי ההסתברות שיצא להן אותו מספר של "עצים"? (יש למצוא ביטוי שאיננו סכום).

ב) ליאת ומיכל מטילות 2n מטבעות כל אחד. מהי ההסתברות שלליאת יצא יותר "עצים" מאשר למיכל?
ג) ליאת מטילה 2n+1 מטבעות ומיכל מטילה 2n מטבעות. מהי ההסתברות שלליאת יצא יותר "עצים" מאשר למיכל?

שאלה 8:

הוכח: א) אם A ו-B ב"ת, A ו-C ב"ת ו-B ו-C זרים ($B \cap C = \varnothing$) אזי A ו- $B \cup C$ ב"ת.

ב) שאם C,B,A ב"ת אזי A ו- $B \cup C$ ב"ת.

ג) שהמסקנה בסעיף א איננה בהכרח נכונה אם לא כוללים את התנאי ש-B ו-C זרים.

שאלה 9:

במשחק מסויים, המשתתפים מנסים לפי תור לבצע פעולה שההסתברות לבצעה בהצלחה היא P. הראשון לבצע את הפעולה הוא המנצח. אם יש שני משתתפים מה ההסתברות שהמשתתף הראשון מנצח? מה אם יש שלושה משתתפים? מה אם יש n משתתפים?

<u>שאלה 10:</u>

שלושה שחקנים: C,B,A משחקים בהטלת מטבע (הוגן). כללי המשחק: קודם משחקים A נגד B. הזוכה מביניהם משחק נגד C. אם יזכה שוב יגמר המשחק בנצחונו. אך אם C יזכה ישחק C עם השלישי. המשחק נגמר כאשר אחד מהשחקנים זוכה פעמיים ברציפות. מה ההסתברות לניצחון של A, B או C?

<u>שאלה 11</u>

באוכלוסיה של 48% זכרים ו-52% נקבות, 5% מהזכרים עוורי צבעים ו- 0.25% מהנקבות עוורות צבעים.

א. אם בוחרים אדם מהאוכלוסייה מה ההסתברות שהוא (היא) עיוורי צבעים?
ב. אם בוחרים אדם (באקראי) עיוור צבעים, מה ההסתברות שנשחר זכר?

<u>שאלה 12</u>

במאפייה מסוימת עובדים 3 אופים A,B,C כאשר האופים מכינים את " עוגת הבית " העוגה אינה תופחת בהסתברות : 0.02,0.03, 0.05 בהתאמה. A מכין 50% מהעוגות, B מכין 30% מהעוגות וC מכין את השאר. איזה אחוז מכישלונות העוגה נגרם ע"י A?

<u>שאלה 13</u>

אם במבחן סטודנט קורא את ההוראות הוא מקבל ציונים A,B,C,D בהסתברות $\frac{1}{4},\frac{3}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{8}$ בהתאמה.

אם הוא לא קורא את ההוראות, דבר שקורא ב 75% מהמקרים ההסתברויות הם: $\frac{3}{10},\frac{2}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{10}$

א) מה ההסתברות שהסטודנט יקבל ציון B?
ב) מה ההסתברות שסטודנט שקיבל ציון B קרא את ההוראות?

<u>שאלה 14</u>

אדם ניגש לבצע 3 הגרלות. לפניו 2 מכונות, במכונה A הסיכוי לזכות : 0.6. במכונה B הסיכוי לזכות : 0.3. להגרלה הראשונה האדם בוחר את המכונה באופן מקרי. בכל שלב , אם הוא זוכה הוא מגריל שוב מאותה מכונה, ולא הוא עובר למכונה הבאה.

א. מה הסיכוי שההגרלה השנייה תבוצע במכונה A.
ב. כנ"ל, אם ידוע שההגרלה השלישית בוצעה במכונה A.

<u>שאלה 16</u>

באוכלוסייה מסוימת 30% מעשנים, 20% בעלי עודף משקל, 20% סובלים מבעיות לב.

מתוך אלו הסובלים מבעיות לב, 40% מעשנים ו40% בעלי עודף משקל. מצא:

א. את ההסתברות שמעשן יסבול מבעיות לב ואת ההסתברות שמישהו בעל עודף משקל יסבול מבעיות לב.

ב. מתוך המעשנים באכלוסיה הכללית, 20% בעלי עודף משקל, אך מתוך המעשנים הסובלים מבעיות לב 50% בעלי עודף משקל.

מצא את ההסתברות שמישהו שגם מעשן וגם בעל עודף משקל, יסבול מבעיות לב.
בנוסף, מצא את ההסתברות שמעשן בעל משקל רגיל יסבול מבעיות לב.

<u>שאלה 17:</u>

הוכח או הפרך:

אם A ו-B בת"ל, אזי גם A^c ו B^c בת"ל.

אם A לא תלוי ב B ,אזי B לא תלוי בA.

<u>שאלה 18</u>

בכד א שלושה כדורים לבנים ואחד שחור. בכד ב שלושה כדורים שחורים ואחד לבן.

בוחרים כד אקראי ומוצאים ממנו כדור אחד. אם הכדור הוא לבן, מוצאים מאותו כד כדור נוסף.(ללא החזרה) אם הכדור השני הוא שחור, עוברים לכד שני ומוצאים ממנו כדור אחד.

אם בסופו של דבר שני הכדורים שבידנו באותו הצבע, מה ההסתברות שהכד שבחרנו בהתחלה היה כד א ?

<u>שאלה 19</u>

באחת מחברות הביטוח הישיר, בשל עומס פניות, רק 60% מהפניות נענות באופן מיידי.

שאר הפונים מתבקשים להשאיר את מס הטל" . ב-75% מהמקרים חוזר נציג חברת הביטוח לפונה באותו יום ובשאר ביום למחרת. הסיכוי שפונה ירכוש בחברה הוא: 0.8 אם נענה מיד, 0.6 אם חזרו אליו באותו יום, ו-0.4 אם חזרו אליו למחרת.

א. מה ההסתברות שאדם הפונה לחברת ביטוח ירכוש בה ביטוח?
ב. ידוע כי אדם רכש ביטוח בחברה. מה ההסתברות שהשאיר את מס הטל" וחזרו אליו באותו יום?
ג. האם רכישת ביטוח והשארת מספר לטלפון ב"ת? – נמק !

<u>שאלה 20</u>

הוכח: אם AוB בת"ל, וכן A ו C בת"ל,

ובנוסף B ו C זרים ($B\cap C=\varnothing$) אזי מתקיים: A ו- $B\cup C$ בת"ל.

למעשה, עלינו להוכיח כי : $P(A\cap(B\cup C))=P(A)P(B\cup C)$

שאלה 21

בעיית המזכירה המבולבלת:

ישנן N מכתבים ו-N מעטפות ממוענות כאשר המכתבים מוכנסים אקראית למעטפות. מה ההסתברות שאף מכתב לא יגיע ליעדו הנכון?

משתנים מקריים בדידים

- פונקצית ההתפלגות המצטברת F של משתנה מקרי X מוגדרת לכל מספר ממשי $F(b) = P(X \le b) \quad : b \in (-\infty, \infty)$.
  תכונות: א. F היא פונקציה לא יורדת, כלומר: $a < b \Rightarrow F(a) \le F(b)$
  ב. $F(b) \xrightarrow[b\to\infty]{} 1$
  ג. $F(b) \xrightarrow[b\to-\infty]{} 1$
  ב. F רציפה מימין. כלומר לכל b ולכל סדרה יורדת b_n, כאשר $n \ge 1$, המתכנסת ל-b, מתקיים $\lim_{b\to\infty} F(b_n) = F(b)$.

$$E(g(x)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k) * P(X = k)$$

- $E(C + K * X) = C + K * E(X)$
  $E(E(X)) = E(X)$
- $Var(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2$
  $Var(C + K * X) = K^2 Var(X)$

שאלה 1

מטילים שתי קוביות סימטריות. יהי Y – סכום ההטלות. מצאו התפלגות Y.

שאלה 2:

נתונה ההתפלגות של X ע"י:

k	5	6	7
$P(X = k)$	8/15	2/15	5/15

א. מצא את התוחלת והשונות של X.
ב. נגדיר משתנה חדש: $Y = 3X + 120$. מצא את התוחלת והשונות של Y.

שאלה 3:

בכובע נמצאים שישה תלושי הגרלה. על שלושה רשום מספר 0. על שניים רשום מס' 20. ועל אחד רשום מס' 40. כל מהמר משקיע $20 על מנת להשתתף בהגרלה. עליו למשוך שני תלושים מן הכובע ומקבל סכום דולרים אשר שווה לממוצע של שני המספרים. חשב:
א. את ההתפלגות הסכום שהמהמר מקבל.
ב. את תוחלת הרווח ושונות הרווח.

שאלה 5:

פונקצית ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי X נתונה ע"י:

$$F(X)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ x/2 & 0\le x<1 \\ 2/3 & 1\le x\le 2 \\ 11/12 & 2\le x<3 \\ 1 & 3\le x \end{cases}$$

חשב: $P(x<3),\ P(x=1),\ P(x>1/2),\ P(2<x<4)$

שאלה 6:

משתנה מקרי X מקבל את הערכים 0,2,4,6,8 בהסתברויות:

i	0	2	4	6	8
$P(X=i)$	1/9	2/9	3/9	2/9	1/9

מצא את התפלגותם ואת תוחלתם של המשתנים המקריים

$$Y=(X-2)/(X+2),\ Z=(X-2)^2$$

שאלה 7:

בכד יש ארבעה כדורים שחורים, שלושה כדורים לבנים ושני כדורים אדומים. מוציאים מתוך הכד מדגם של ארבעה כדורים באופן מקרי וללא החזרה. נגדיר: X- מספר הצבעים השונים המופיעים במדגם.

א. מצאו התפלגות X.

ב. חשבו תוחלת ושונות של X, ותוחלת של X^3+X .

ג. נגדיר Y – מספר הכדורים האדומים במדגם. חשבו תוחלת ושונות X.

ד. מסדרים באקראי את ארבעת הכדורים שבמדגם בשורה. מהי ההסתברות שבשורה יש שני כדורים אדומים הנמצאים אחד ליד השני?

סוגים של התפלגויות בדידות

התפלגות בינומית $X \sim Bin(n,p)$

$$P(X=k)=\binom{n}{k}P^k(1-P)^{n-k}$$

מ"מ X = מספר ההצלחות ב-n ניסויים ברנוליים (0 או 1). כאשר ההסתברות להצלחה בניסוי בודד =P.

P(X=k) = ההסתברות לk הצלחות מתוך n. (k=0,...n)

$$E(X)=n\cdot p \qquad V(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$$

שאלה 8

בניתוח מסוים מצליחים לרפא 70% מהחולים. מבצעים 5 ניתוחים. חשבו את ההסתברויות הבאות:

א. שבדיוק 3 ניתוחים הצליחו.
ב. שלפחות 3 ניתוחים הצליחו.
ג. שלכל היותר 3 ניתוחים הצליחו.

שאלה 9

מתוך סקר שנערך בין תושבי עיר מסוימת התברר כי 45% מהתושבים היו בעד פתיחת הקניון בעיר, 30% נגד ו 25% אין דעה בעניין. בוחרים באקראי 4 אנשים- תושבי העיר. מה ההסתברות ש-

א. ארבעתם בעד פתיחת הקניון ?
ב. שלפחות אחד יהיה נגד הפתיחה ?
ג. שלארבעתם תהיה דעה מסוימת ?
ד. שלפחות לאחד מהם לא תהיה דעה בנידון?

שאלה 10

ידוע כי 45% מתושבי מדינה מסוימת מעשנים.

א. בוחרים באקראי 6 אנשים. מה ההסתברות שבניהם מס' המעשנים= מס ' הלא מעשנים?
ב. בוחרים 8 אנשים מה ההסתברות שבניהם מספר המעשנים שונה ממספר הלא מעשנים?

התפלגות גיאומטרית $X \sim Geo(p)$

$$P(X=k)=(1-P)^{k-1}\cdot P \qquad k=1,..,n$$

מ"מ X = מספר הניסויים עד להצלחה הראשונה (כולל ההצלחה הראשונה).

$$E(X)=\frac{1}{p} \qquad V(X)=\frac{1-p}{p^2}$$

<u>שאלה 12</u>

סטודנט חייב במשך הסמסטר לעבור 5 מבחנים כדי להבחן במבחן הסופי. ההסתברות לעבור כל מבחן, בלי קשר למבחנים האחרים, היא 0.7 . אם הוא לא עובר איזשהו מבחן הוא לא ממשיך הלאה. מה ההסתברות

א) שהוא יכשל במבחן ה-5 ?
ב) שהוא יעבור פחות מ-3 מבחנים?

<u>שאלה 13</u>

בסוף כל דקה של שיחת טלפון מחליטים אם להמשיך או לא. מה ההסתברות שאדם שמדבר עכשיו כבר n דקות ידבר עוד 10 דקות בלבד, כאשר ההסתברות שימשיך כל דקה היא 0.7

<u>שאלה 14</u>

אדם מנסה לחייג לאוניברסיטה- מניסיונות קודמים ידוע כי ההסתברות לקבל מענה בכל ניסיון חיוג הוא 0.25 . אדם שמחייג לאוניברסיטה ממשיך לחייג עד שמתקבל מענה- מה ההסתברות

א) שיקבל מענה בניסיון ה-9?
ב) שיקבל מענה לאחר יותר מ 4 ניסיונות חיוג?
ג) חשבו את התוחלת של משתנה מקרי זה.

<u>התפלגות פואסון</u> $X \sim Poi(\lambda)$

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=V(X)=\lambda$$

<u>שאלה 15</u>

ידוע שמספר הפניות <u>לדקה</u> ל 144 מתפלג פואסון עם $\lambda=5$ מה ההסתברות

א) שבין 10:00 ל 10:01 לא תתקבל אף פניה ?
ב) שבדקה זו תתקבלנה לכל היותר 3 פניות?
ג) שבין 10:00 ל 10:05 תתקבלנה 4 פניות?

<u>שאלה 16</u>

לחברת דיוור יש 10,000 לקוחות. אם ידוע שבממוצע 20 אנשים מבקשים לעזוב את השרות כל חודש, מה ההסתברות שבחודש אחד יעזבו 30 אנשים?

<u>שאלה 17</u>

בליל קיץ ניתן לצפות בכוכב נופל אחד כל 10 דקות. מה ההסתברות לצפות ב2 כוכבים נופלים בטווח של 15 דקות?

התפלגות בינומית שלילית $X \sim NB(r,p)$

$$P(X=k)=\binom{k-1}{r-1}p^r(1-p)^{k-r} \qquad ,k=r,r+1....$$

$$E(X)=\frac{r}{p} \qquad V(X)=\frac{r(1-p)}{p^2}$$

מ"מ X הוא מספר הניסויים שיש לבצע על מנת לקבל בדיוק r הצלחות.

שאלה 18:

חשבו את התוחלת ואת השונות של מספר הפעמים שיש להטיל קובייה עד שמקבלים 4 פעמים את התוצאה 1.

שאלה 19:

מבקרת מהמרת בקזינו ב 5$ על אדום ברולטה, שוב ושוב עד לזכייתה הרביעית. בכל הימור היא מרוויחה 5$ בהסתברות $\frac{18}{38}$ או מפסידה 5$ בהסתברות $\frac{20}{38}$

א) מהי ההסתברות שהיא תהמר 9 פעמים בסה"כ?

ב) מהי תוחלת הרווח של המהמרת בהפסיקה לשחק?

התפלגות היפר-גיאומטרית $X \sim HG(m,N,n)$

$$P(X=k)=\frac{\binom{m}{k}\binom{N-m}{n-i}}{\binom{N}{n}} \qquad k=0,1,..,n$$

בוחרים באקראי מדגם מגודל n , מתוך כד המכיל N כדורים – m לבנים ו N –m שחורים.

מ"מ X = מספר הכדורים הלבנים שנבחרו.

$$E(X)=\frac{nm}{N} \qquad V(X)=\frac{N-n}{N-1}np(1-p)$$

שאלה 20:

קמעוני רוכש רכיבים חשמליים בחבילות של 10 יחידות. הרכישה של כל חבילה מתבצעת רק לאחר שהוא בדק באקראי 3 רכיבים מתוכה, ומצא שהם תקינים. אם ב 30% מהחבילות יש 4 רכיבים פגומים וב- 70% יש רכיב 1 פגום, איזה אחוז מהחבילות שבדק אין הקמעוני רוכש?

מ"מ דו מימדי, התפלגות משותפת

נוסחאות:

$$E(\sum x)=\sum E(x)$$
$$x,y-independable$$
$$V(x+y)=V(x)+V(y)$$
$$\text{cov}(x,y)=E(xy)-E(x)E(y)$$
$$x,y-depandable$$
$$\text{var}(x+y)=v(x)+v(y)+2\text{cov}(x,y)$$

שאלה 1:

מרכיבים באקראי מס' דו סיפרתי מהספרות 1,2,3,4.

יהי X מס' הספרות השונות המופיעות במס' ו Y מס' הפעמים שהספרה 1 מופיעה.

מצא:

א.ההתפלגות המשותפת של הזוג (X,Y)

ב. האם X ו Y בת"ל

ג. מצא את השונות המשותפת – COV(X,Y).

שאלה 2:

נתונים שני כובעים, בכל אחד ארבעה פתקים ממוספרים מ 1-4. מוציאים באקראי פתק מכל כובע.

נסמן ב- X תוצאה מקסימלית וב-Y –תוצאה מינימלית. מצא את:

א. ההתפלגות המשותפת של X ו- Y.
ב. COV(X,Y)

שאלה 3:

בכל הטלה של קובייה לא הוגנת, כל תוצאה אי זוגית (1,3,5) מתקבלת בהסתברות C, וכל תוצאה זוגית בהסתברות 2C.

א. חשב את C.
ב. נניח שמטילים את הקובייה פעם אחת, ונגדיר את המשתנים המקריים הבאים:

$$Y = \begin{cases} 1-(x>3) \\ 0-(x\le 3) \end{cases} \qquad X = \begin{cases} 1\text{ - even} \\ 0\text{ - odd} \end{cases}$$

מצא את פונק' ההסתברות המשותפת של X וY.

שאלה 4:

יהיו X ו Y מ"מ ב"ת בעלי אותה התפלגות: $P(X=r)=P(Y=r)$

4	3	2	1	r
1/8	3/8	3/8	1/8	P(X=r)

א. מצא את ההסתברות ש X=Y ואת ההסתברות ש X<Y
ב. מצא את ההתפלגות של X+Y, ‏E(X+Y) ואת V(X+Y).

שאלה 5:

מטילים מטבע לא הוגן אינסוף פעמים. הסתברות להצלחה בהטלה בודדת שווה ל-p. יהי X_k מספר ההטלה בה התקבלה הצלחה – k -ית. למשל, עבור סדרת התוצאות משמאל לימין

$$X_1=1, X_2=4, X_3=5, X_4=10 \Rightarrow 1,0,0,1,1,0,0,0,0,1$$

מצאו את מקדם המתאם של $X_m X_n$.

שאלה 6:

לנשף של קיסר רומאי הוזמנו n זוגות. לפני ריקוד הפתיחה הקיסר הרכיב באופן אקראי לגמרי n זוגות הרוקדים. תניחו כי הקיסר דאג לכך שבנים רוקדים רק עם בנות.

א) יהי I_k המשתנה המקרי המוגדר על ידי: אם גבר k רוקד עם בת זוגתו $I_k=1$. אחרת $I_k=0$.
חישבו את $E(I_k)$ ו- $E(I_j I_k)$ עבור $k\neq j$.

ב) בהשתמש בהנ"ל, או אחרת, הסיקו כי $\{I_k\}$ משתנים תלויים.

ג) יהי S_n מספר הגברים שבכל זאת ירקדו עם בת זוגם. חשבו את $E(S_n)$ בעזרת הנוסחה $S_n=\sum_{k=1}^{n} I_k$.

ד) חשבו את $VAR(S_n)$ בעזרת הנוסחה $VAR(S_n)=\sum_{k=1}^{n} VAR(I_k)+2\sum_{i<j} COV(I_i,I_j)$.

<u>שאלה 7:</u>

יהי (X,Y) וקטור אקראי בעל צפיפות:

$$f_{X,Y}(x,y)=\begin{cases}1/4(1+xy) & |x|\le 1, |y|\le 1\\ 0 & else\end{cases}$$

א) הוכיחו כי המשתנים המקריים X ו-Y אינם בלתי תלויים.

ב) הוכיחו כי המשתנים המקריים X^2 ו- Y^2 בלתי תלויים.

ג) חשבו את $COV(X^2, X^2+Y^2)$.

<u>שאלה 8:</u>

גבר ואישה מחליטים להיפגש במקום מסוים, בין השעות 12:00 ל- 13:00. כל אחד מהם מגיע למקום שנקבע באופן בלתי בתלוי באחר, ברגע שהתפלגותו אחידה בפרק הזמן דלעיל. מצא את ההסתברות שהמגיע ראשון חייב להמתין למעלה מ-10 דקות.

<u>מ"מ רציפים</u>

- מ"מ X נקרא מ"מ רציף אם קיימת פונ' ממשית אי-שלילית f המכונה פונקצית הצפיפות של X , כך שלכל קבוצה B מתקיים $P\{X\in B\}=\int_B f(x)dx$.
- אם X מ"מ רציף, אזי פונ' ההתפלגות המצטברת שלו F, מוגדרת לכל X ממשי ע"י $F(x)=P\{X\le x\}$.
- פונ' ההתפלגות המצטברת גזירה ומתקיים $F'(x)=f(x)$ כלומר הנגזרת של פונקצית ההתפלגות המצטברת שווה לפונקצית הצפיפות.

- התוחלת של X מ"מ רציף $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx$
- השונות של X מ"מ רציף $E(X^2)-[E(x)]^2$

<u>התפלגות אחידה רציפה</u> $X \sim U(\alpha,\beta)$

בוחרים באופן מקרי מספר X בין α ל β משיקולי סימטריה בין כל תוצאות הניסוי,
פונקציית הצפיפות:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta-\alpha} & \alpha\le x\le\beta\\ 0 & else\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{\beta+\alpha}{2} \qquad V(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}$$

<u>התפלגות מעריכית</u> $X \sim Exp(\lambda)$

נתון זרם ארועים פואסוני בעל קצב λ. יהי X משך הזמן הדרוש עד לאירוע הראשון.

פונ' הצפיפות: $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$

בהתפלגות זו (בנוסף להתפלגות גאומטרית) קיימת תכונת "חוסר הזכרון".

3. אוטובוסים מגיעים לתחנה מסוימת ברווחי זמן של 15 דקות, החל מהשעה 7:00. אם נוסע מגיע לתחנה בזמן **שמתפלג אחידה** מ-7:00 ל-7:30, מה ההסתברות –
   א. שיחכה פחות מ- 5 דקות לאוטובוס?
   ב. שיחכה יותר מ-10 דקות?

4. אורך שיחה בטלפון מתפלג מעריכית עם λ=0.1 . מה ההסתברות –
   א. ששיחה אורכת יותר מ-10 דקות?
   ב. ששיחה אורכת בין 10 ל-20 דקות?

7. הזמן שדרוש לתיקון מכונה הוא מ"מ המתפלג מעריכית עם $\lambda=2$ מה ההסתברות ש-
   א. זמן התיקון יעלה על חצי שעה?
   ב. תיקון יקח לפחות 12.5 שעות בהנחה שהוא כבר נמשך יותר מ12 שעות?

9. זמן החיים (בשנים) T של מנוע מכונית הוא מ"מ רציף בעל פונקציית צפיפות:
   $f(X)=\begin{cases}cx^2\ (10-x) & 0<x<10\\ 0 & else\end{cases}$, כאשר c קבוע.
   א. מצאו את c.
   ב. מצאו את $E(T),V(T)$
   ג. מה ההסתברות שמנוע בן 7 שנים יחזיק מעמד עוד שנתיים?

קירובים להתפלגות נורמאלית

הקירוב הנורמאלי להתפלגות בינומית

אם $X \sim Bin(n,p) \quad and \quad n > 30$

אז $X \sim N(np, \left(\sqrt{npq}\right)^2)$

14. ל 40% מהסטודנטים באוניברסיטה יש מכונית.

א. מה ההסתברות שמתוך 6 סטודנטים שנבחרו באקראי:

1) ל 4 יהיו מכוניות?

2) לפחות לאחד תהיה מכונית?

ב. מהי ההסתברות שבקבוצה של 100 סטודנטים לפחות ל- 50 תהיה מכונית?

15. שולחים הזמנות לאירוע ל- 300 איש. ההסתברות שאורח יגיע היא 0.8, ב"ת באורחים האחרים. כמה מנות צריך להכין כדי שבהסתברות של לפחות 0.95 לכל אורח תהיה מנה?

הקירוב הנורמאלי לפואסון

אם $X \sim Poi(\lambda) \quad and \quad \lambda > 5$

אז $X \sim N(\lambda, \left(\sqrt{\lambda}\right)^2)$

16. למ"מ X יש התפלגות פואסון עם פרמטר $\lambda = 200$

מצאו בקירוב את ההסתברויות:

$$P(180 \le X \le 210)$$
$$P(X < 150)$$

פונקציה יוצרת מומנטים

פונקציה יוצרת מומנטים:

$$M(t) = E(e^{tX})$$

אם X ו-Y בלתי תלויים אזי:

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

שאלה 9:

יהי X משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים n ו-p. מצא את פונקציית יוצרת המומנטים שלו ע"י 2 דרכים שונות.

שאלה 11:

שתי קוביות משחק נזרקות. יהיו: X התוצאה הגבוהה ביותר ו-Y מספר הקוביות עם תוצאה זוגית.

א. מצא את טבלת ההסתברות של (X,Y).
ב. חשב את ההסתברויות $P(2Y < X),\ P(X+Y \le 6),\ P(X \ge 4, Y = 2),\ P(X \ge 4, Y = 1)$.
ג. חשב את ההתפלגויות השוליות של X ו-Y.
ד. מצא את $Var(Y),\ E[Y],\ Var(X),\ E[X]$.
ה. האם X ו-Y בלתי תלויים? נמק.
ו. מצא את התפלגות של $Z = X + Y$.
ז. מהי התוחלת והשונות של Z.
ח. מהי פונקצית יוצרת מומנטים של X
ט. מהי פונקציה יוצרת מומנטים של Y
י. מהי פונקציה יוצרת מומנטים של Z
יא. מצא באמצעות סעיפים ט,ח,ג את התוחלת והשונות והשווה לתוצאה שקבלת בסעיף ד.
יב. מצא באמצעות סעיף ט,ו את התוחלת והשונות של Z.

שאלה 13:

בכד חמישה כדורים הממוספרים מ-1 עד 5. כדורים 1 ו- 2 אדומים, כדורים 3 ו- 4 ירוקים וכדור 5 הוא לבן. מוציאים מהכד, באופן מקרי וללא החזרה, שני כדורים. יהיו:

X – מספר הכדורים הירוקים שיצאו.

Y – מספר הכדורים, שעליהם מספרים זוגיים, שיצאו.

א. מצא את פונקצית ההסתברות המשותפת של X ו- Y.
ב. האם X ו- Y בלתי מתואמים?
ג. ידוע כי יצא לפחות כדור אחד אדום. מה ההסתברות שיצא בדיוק כדור אחד שעליו מספר זוגי?

<u>שאלה 14:</u>

ההסתברות שקוביית שוקולד אגוזים אכן תכיל אגוז היא 0.5 (בהסתברות 0.5 הקובייה אינה מכילה אגוז). בצלחת מס' 1 שתי קוביות שוקולד ובצלחת מס' 2 שלוש קוביות. אני בוחר צלחת באקראי. יהי N מספר הצלחת ויהי X מספר האגוזים שאקבל. מצאו את התוחלת ואת השונות המשותפת.

אי שוויונים וחוק המספרים הגדולים (החלש)

<u>משפטי גבול ואי שיוויונים</u>

<u>א"ש מרקוב</u>

אם X הוא מ"מ המקבל ערכים אי שלילים בלבד, אז לכל ערך חיובי a מתקיים- $P\{X \geq a\} \leq \frac{E(X)}{a}$

<u>א"ש צבישב</u>

אם X מ"מ שתוחלתו μ ושונותו σ^2 הן סופיות, אז לכל ערך חיובי k מתקיים

$$P\{|X-\mu| \geq k\} \leq \frac{\sigma^2}{k^2}$$

<u>חסם צ'רנוף :</u>

[1] עבור s ממשי ו-$\alpha > 0$ מתקיים $P(e^{sX} \geq \alpha) \leq \Phi(s)/a$ כאשר $\Phi(s) = E\{e^{sX}\}$.

[2] עבור A , ו-s ממשיים מתקיים:

$$s > 0 \quad P(X \geq A) \leq e^{-sA}\Phi(s)$$
$$s < 0 \quad P(X \leq A) \leq e^{-sA}\Phi(s)$$

כאשר $\Phi(s) = E\{e^{sX}\}$.

[3] לכל A ממשי :

$$P(X \geq A) \leq \min_{s>0}\{e^{-sA}\Phi(s)\}$$
$$P(X \leq A) \leq \min_{s<0}\{e^{-sA}\Phi(s)\}$$

<u>או בקיצור:</u>

$$\forall t > 0$$
$$P(x \geq a) \leq e^{-ta}E(e^{tx})$$
$$\forall t < 0$$
$$P(x \leq a) \leq e^{-ta}E(e^{tx})$$

<u>חוק המספרים הגדולים:</u>

עבור n מספיק גדול נקבל-

$\overline{X}_n \to E(X_i)$

באמצעות אי השוויונים ניתן לחשב את ה-n הנדרש לצורך דיוק מסוים.

$$P\left\{|\overline{X}_n - E(X_i)| \le t\right\} \ge 1 - \frac{Var(X_i)}{nt^2} \ge per.$$

שאלה 1:

אסטרונום מעוניין לחשב בשנות אור את המרחק מתחנת החלל שלו לכוכב מרוחק. למרות שיש לאסטרונום טכניקות למדידה הוא יודע שבגלל שינויים בתנאי האטמוספרות וטעויות נורמליות שבכל פעם שמודדים את המרחק לא מקבלים את המרחק המדויק אלא הערכה בלבד. כתוצאה מכך האסטרונום מתכוון לעשות סדרת מדידות ואז להשתמש בערך הממוצע של המדידות הללו כהערכה למרחק האמיתי. אם האסטרונום מאמין שהערכים של המדידות ב"ת ושווי התפלגות עם תוחלת d ושונות 4 שנות אור, כמה מדידות צריך לעשות כדי שיהיה מספיק בטוח שהערכי המרק שלו יהיו מדויקים עד כדי ± 0.5 שנות אור?

שאלה 2:

מצאו את ההסתברויות הבאות:

א) $P(X_1 + ... + X_{100} > 400)$ כאשר $X_1 + ... + X_{100}$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות פואסון עם $\lambda = 4$.

ב) $P(75 < X_1 + ... + X_{40} < 40)$ כאשר $X_1 + ... + X_{40}$ מ"מ ב"ת בעלי התפלגות מעריכית עם $\lambda = 0.5$.

שאלה 3:

מספר הפריטים הנשלחים כל יום לתיבת דואר הוא מ"מ עם תוחלת 50 ושונות 5. מה ניתן לומר על ההסתברות שמספר הפריטים הוא בין 40 ל-60?

שאלה 4:

מטילים מטבע מאוזנת n פעמים. נסמן ב-X את מספר ההצלחות וב-Y=n-X את מספר הכשלונות.

הוכיחו בעזרת אי שוויון צ'בישב כי לכל a>0 מתקיים: $P(\frac{X}{Y} > 1 + \frac{a}{\sqrt{n}}) < \frac{5}{a^2}$ עבור n מאוד גדול.

שאלה 5:

תהא $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מ"א ב"ת כך ש- $EX^2 < \infty$. נגדיר $S_n = X_1 + X_2 + ...X_n$. הוכיחו כי עבור כל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{E(S_n} - 1\right| \ge \varepsilon\right) = 0$

שאלה 6:

ידוע מניסיון העבר כי ציון במבחן הגמר של סטודנט הוא משתנה מקרי שתוחלתו 75.

א. מצא חסם עליון להסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה לפחות 85.
ב. נניח שהמרצה יודע בנוסף ששונות ציון מבחן הגמר של הסטודנט היא 25,
מה אפשר לומר על ההסתברות שציון מבחן הגמר של סטודנט יהיה גבוה מ-65 ונמוך מ-85?

ג. מהו מס' הסטודנטים שיש לבחון על מנת להבטיח בהסתברות 0.9 לפחות, שממוצע ציוני הגמר שלהם יהיה 75 ± 5

(פתור ללא שימוש במשפט הגבול המרכזי).

ד. חזור על סעיף ג' תוך שימוש במשפט הגבול המרכזי.

שאלה 7:

ראובן מטיל שלוש קוביות ורושם את סכום ריבועי התוצאות שמעון מטיל שלוש עשרה קוביות משחק הוגנות, ומחבר את התוצאות.בהנחת אי תלות בין הזריקות, מצא את:

א. תוחלת ההפרש בין המספר שראובן מקבל והין המספר ששמעון מקבל.
ב. מצא בערך, את ההסתברות שסכום התוצאות של שמעון יהיה גדול מ-49.

שאלה 8:

יהי $X \sim poi(\lambda)$. הוכח: $E(e^{tx}) = e^{\lambda(1+e^t)}$

שאלה 9:

א. הראו כי עבור s ממשי ו-$\alpha > 0$ מתקיים $P\left(e^{sX} \geq \alpha\right) \leq \frac{\Phi(s)}{\alpha}$ כאשר $\Phi(s) = E\left\{e^{sX}\right\}$

ב. הראו כי עבור A , ו-s ממשיים מתקיים:

$$P\left(X \geq A\right) \leq e^{-sA}\Phi(s) \qquad s > 0$$

$$P\left(X \leq A\right) \leq e^{-sA}\Phi(s) \qquad s < 0$$