פיתרון תרגיל 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ח

16 במרץ 2019

1. כמה סדרות $(a_1, a_2, ..., a_k)$ של k מספרים מתוך $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ יש המקיימות: $\forall 1 \leq i \leq k-1 : a_{i+1} \geq a_i + 4$?

פתרון:

נסמן $x_0 = a_1$, ולכל $1 \leq i \leq k-1$ נסמן $x_i = a_{i+1} - a_i$, ועוד נסמן $x_k = n - a_k$. נקבל שמספר הסדרות הנתונות שקול למספר הפתרונות למשוואה:

$$x_0 + x_1 + x_2 + ... + x_k = n \ (*)$$

כאשר $x_0 \geq 1, \forall 1 \leq i \leq k-1 : x_i \geq 4, x_k \geq 0$ שלמים אי שליליים. נמיר את המשתנים באופן הבא: נסמן $y_0 = x_0 - 1, y_k = x_k$ ולכל $1 \leq i \leq k-1$ נסמן $y_i = x_i - 4$ ונקבל שמספר הפתרונות למשוואה $(*)$ שקול למספר הפתרונות למשוואה:

$$y_0 + y_1 + y_2 + ... + y_k = n - 4(k-1) - 1 = n - 4k + 3$$

כאשר $\forall 1 \leq i \leq k : y_i \geq 0$ שלמים אי שליליים (הורדנו $k-1$ פעמים 4), שזה, לפי מה שלמדנו,

$$\left(\!\!\binom{k+1}{n-4k+3}\!\!\right) = \binom{k+1-1+n-4k+3}{n-4k+3} = \binom{n-3k+3}{k}$$

2. כמה סדרות $(a_1, ..., a_{10})$ של מספרים שלמים יש המקיימות את התנאי הבא:

$$1 \leq |a_1| \leq |a_2| \leq ... \leq |a_{10}| \leq 1000$$

פתרון:

נסמן את התנאי בשאלה ב $(*)$. ראשית נחשב עבור מספרים שלמים אי שליליים, כאשר במצב זה הערך המוחלט בתנאי חסר משמעות. נסמן:

$$x_1 = a_1 - 1, x_2 = a_2 - a_1, x_3 = a_3 - a_2, ..., x_{10} = a_{10} - a_9, x_{11} = 1000 - a_{10}$$

ונקבל שמספר הסדרות הנ"ל הוא בדיוק מספר הפתרונות של המשוואה $\sum_{i=1}^{11} x_i = 999$, כאשר $\forall 1 \leq i \leq 11 : x_i \geq 0$. מספר הפתרונות הוא, כפי שלמדנו:

$$\left(\binom{11}{999} \right) = \binom{11-1+999}{999} = \binom{1009}{999}$$

כך מצאנו את מספר הסדרות בשלמים אי שליליים, אבל התרגיל אמר שהמספרים יכולים להיות גם שליליים! נשים לב שכל סדרה בשלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$, מקיימת את התנאי גם אם נחליף חלק מאיברי הסדרה במינוס שלהם. כלומר, אם $(a_1, ..., a_{10})$ סדרה מספרים שלמים אי שליליים המקיימת את תנאי $(*)$, אז כל הסדרות מהצורה $(\pm a_1, ..., \pm a_{10})$ מקיימות גם הן את התנאי. לכן כל סדרה כנ"ל של מספרים שלמים אי שליליים מייצגת קבוצה של 2^{10} סדרות כאלה במספרים שלמים לאו דוקא אי שליליים (כל איבר יכול להיות אחת משתי אופציות: $+a_i$ או $-a_i$). לכן הפיתרון הסופי הוא:

$$2^{10}\binom{1009}{999}$$

3. הועד האקדמי של הפקולטה להנדסה פרסם תחרות מאמרים אקדמיים: יחולקו 5 פרסים כספיים (מניחים שבפקולטה יש לפחות 5 סטודנטים שיגישו מאמר) בסדר יורד, עם הפרש של לפחות 1000 ש"ח בין פרס לפרס, כאשר הפרס הראשון (עבור המאמר המוצלח ביותר) יהיה לכל היותר 20000 ש"ח, והאחרון (עבור המאמר החמישי במוצלחותו) יהיה לכל הפחות 1000 ש"ח. כמה אפשרויות יש לבחירת סכומי הפרסים?

פתרון:

הבעיה שקולה לבעיה הבאה: כמה סדרות של מספרים $(a_1, ..., a_5)$ יש המקיימות: $a_1 \geq 1000, a_5 \leq 20000$, ובנוסף לכל $1 \leq i \leq 4$ מתקיים $a_{i+1} \geq a_i + 1000$ (הפכתי את הסדר בין הפרסים לצורך נוחות). נסמן : $x_1 = a_1 - 1000, \forall 2 \leq i \leq 5$ $x_i = a_i - a_{i-1} - 1000, x_6 = 20000 - a_5$. נקבל שמספר הסדרות הנ"ל שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=1}^{6} x_i = 15000$ כאשר לכל $1 \leq i \leq 6$ המשתנה x_i שלם אי שלילי. מספר הפתרונות הוא:

$$\left(\binom{6}{15000} \right) = \binom{6-1+15000}{6-1} = \binom{15005}{5}$$

4. כמה קבוצות של 4 מספרים מתוך $\{1, 2, \ldots, 100\}$ אינן מכילות שני מספרים עוקבים?

פתרון:

נסדר כל קבוצה כזו בסדר עולה, ונקבל סדרה $(a_1,...,a_4)$ המקיימת: $a_1 \geq 1, \forall 1 \leq i \leq 3 : a_{i+1} \geq a_i + 2, a_4 \leq 100$. נסמן: $x_0 = a_1 - 1, \forall 1 \leq i \leq 3 : x_i = a_{i+1} - a_i - 2, x_4 = 100 - a_4$. מספר הסדרות הנ"ל (הזהה למספר הקבוצות שאינן מכילות שני מספרים עוקבים) שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=0}^{4} x_i = 93$. לכן נקבל:

$$\binom{93+5-1}{93} = \binom{97}{93}$$

5. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$, כאשר $x_i \leq 20$ שלמים (לא בהכרח אי שליליים)?

פתרון:

נמיר כל משתנה בנגדי שלו (כלומר, נסמן $x'_i = -x_i$) ונקבל משוואה חדשה $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = -30$ כאשר $x'_i \geq -20$. נוסיף 20 לכל משתנה ו־80 לאגף ימין ונקבל את המשוואה $x'_1 + x'_2 + x'_3 + x'_4 = 50$ כאשר $x'_i \geq 0$ שלם, שמספר פתרונותיה הוא: $\left(\!\binom{4}{50}\!\right) = \binom{53}{50}$.

6. כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 30$ כאשר:

(א) לכל $1 \leq i \leq 4$: $x_i \geq 0$ זוגי.

(ב) לכל $1 \leq i \leq 4$: $x_i \geq 0$ אי־זוגי.

פתרון:

א. נחלק את המשוואה ב־2 וכך נגיע למשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$, כאשר במשוואה החדשה מתקיים: $\forall i : x_i \geq 0$, ולכן נוכל להשתמש בנוסחא ולקבל:

$$\left(\binom{4}{15}\right) = \binom{4-1+15}{15} = \binom{18}{15}$$

ב. כאן קודם כל נוריד 1 מכל משתנה, ו־4 מאגף ימין, ואז נחלק ב־2, ונקבל משוואה חדשה מתאימה: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 13$, שמספר פתרונותיה הוא:

$$\left(\binom{4}{13}\right) = \binom{4-1+13}{13} = \binom{16}{13}$$

7.

(א) כמה מספרים בין 1000 ל־10000 יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?

(ב) כמה מספרים בעלי n ספרות לכל היותר יש שסכום הספרות שלהם הוא 8?

פתרון:

א. זה שקול למספר הפתרונות למשוואה $x_1+x_2+x_3+x_4=8$ כך ש־$x_i \geq 0 : \forall i \in \{2,3,4\} \wedge x_1 \geq 1$. לכן נסמן $y_i = x_i : \forall i \in \{2,3,4\}, y_1 = x_1 - 1$. ונוריד מהתוצאה אחד, ונקבל את מספר הפתרונות למשוואה $y_1+y_2+y_3+y_4=7$ כך ש־$y_i \geq 0 : \forall i$ ולכן יש $\binom{4+7-1}{7} = \binom{10}{7}$ מספרים כאלה.

ב. נשים לב שאם יש לנו מספר עם פחות מ־n ספרות נוכל להסתכל עליו כמספר עם n ספרות שהספרות השמאליות הן 0. לכן זה שקול למספר הפתרונות למשוואה $\sum_{i=1}^{n} x_i = 8$ כך ש־$x_i \geq 0 : \forall i$ ולכן נקבל: $\binom{n+7}{8} = \binom{n-1+8}{8} = \left(\!\binom{n}{8}\!\right)$.

8. בכמה דרכים ניתן להרכיב חבילת שי לחגים בת 10 פריטים כך שיהיו בה: שניים או שלושה בקוקי יין, צנצנת דבש אחת, לפחות שתי חבילות עוגיות, ולפחות שתי חפיסות שוקולד? (כל הפריטים מאותו סוג זהים).

פתרון:

נחלק ל־2 אפשרויות זרות, שאח"כ נסכום ביניהן (כיון שהן זרות):

א. חבילות עם שני בקבוקי יין: נכניס צנצנת דבש, שני בקבוקי יין, שתי חבילות עוגיות ושתי חפיסות שוקולד. נותר לבחור 3 מהעוגיות והשוקולד, עם חזרות וללא חשיבות לסדר, ולכן זה $4 = \binom{4}{3} = \binom{2-1+3}{3} = \left(\!\binom{2}{3}\!\right)$.

ב. חבילות עם שלושה בקבוקי יין: נכניס צנצנת דבש, שלושה בקבוקי יין, שתי חבילות עוגיות ושתי חפיסות שוקולד. נותר לבחור 2 מהעוגיות והשוקולד, עם חזרות וללא חשיבות לסדר, ולכן זה $3 = \binom{3}{2} = \binom{2-1+2}{2} = \left(\!\binom{2}{2}\!\right)$.

סה"כ 7 אפשרויות.

9. כמה מחלקים (ללא שארית, כמובן) טבעיים שונים יש למספר 600? (רמז: העזרו בפירוק המספר לראשוניים.)

פתרון:

נשים לב ש־ $600 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$, לכן כל מספר מהצורה $2^i \cdot 3^j \cdot 5^k$ כאשר $0 \leq i \leq 3, 0 \leq i \leq 1, 0 \leq k \leq 2$ מחלק את 600.
לכן מספר המחלקים הוא: $4 \cdot 2 \cdot 3 = |\{0,1,2,3\}| \cdot |\{0,1\}| \cdot |\{0,1,2\}|$.

10. אדם נכנס למכולת ומבקש לקנות חומוס. לבקשתו הוא נענה שיש במכולת חומוס של חמש חברות שונות, כאשר כל חברה משווקת את החומוס בקופסאות בשלוש מידות שונות (1 ק"ג, 500 גרם ו 250 גרם), וכל קופסא ניתן לקבל עם סחוג ובלי סחוג.

(א) כמה אפשרויות לקניית קופסת חומוס עומדות בפניו?

(ב) כמה אפשרויות לקניית שתי קופסאות חומוס - האחת עם סחוג והשנייה בלי, עומדות בפניו?

(ג) כמה אפשרויות לקניית שלוש קופסאות חומוס, בשלושה גדלים שונים, עומדות בפניו?

פתרון:

א. מעקרון הכפל נקבל שזה: $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

ב. יש $5 \cdot 3 = 15$ אפשרויות לקופסא עם סחוג, וכנ"ל בלי. כיון שכל אפשרות עם סחוג וכל אפשרות לבלי סחוג יחד הן בחירה לפי התנאי, נקבל שיש $15 \cdot 15 = 225$ אפשרויות כאלה.

ג. לכל גודל יש $2 \cdot 5 = 10$ אפשרויות, ובדומה לסעיף ב נקבל $10^3 = 1000$ אפשרויות.