

תרגיל תיאורטי מספר 1

1. נתון תת המרחב הוקטורי הבא של \mathbb{R}^4 :

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

מצא מערכת מישוואות ליניארית (ניתן לייצגה גם ע"י מטריצה) שאוסף הפתרונות שלה הוא בדיוק U .

2. האם הקבוצה $B = \{1 + x^2 + 2x^3, 5 + x + 6x^2 + 13x^3, -3 - x - 3x^2 - 8x^3\} \subseteq \mathbb{R}_3[x]$ תלויה ליניארית? אם כן, מצא צ"ל לא טריויאלי שנותן 0, אם לא השלימו אותה לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

3. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ ותהי

$$U = \{p(x) \in V \mid p(x) = x \cdot p'(x)\}$$

תת קבוצה של V . $(p(x))$ היא הנגזרת של $p(x)$

(א) הוכיחו ש- U תת מרחב של V .

(ב) מצאו בסיס ומימד ל- U .

4. מצאו מטריצה $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ כך ש $N(A) = C(A)$ (למתעניינים: האם תוכלו להכליל ולמצוא $A \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}$ עם $N(A) = C(A)$)

5. עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 4}$ מצאו בסיס למרחבים $N(A), C(A), R(A)$

6. תהי מטריצה $A \in M_{4 \times 8}(\mathbb{R})$ כך ש- $\text{rank}(A) = 4$

(א) האם שורות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

(ב) האם עמודות A תלויות לינארית או בלתי תלויות לינארית?

(ג) למה שווה $\dim(N(A))$? והאם $N(A) = R(A)$ בהכרח?

7. יהיה $A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$ הוכיחו/הפריכו: $\text{rank}(A) - \text{rank}(B) \leq \text{rank}(A - B)$

8. יהיו $n < m$ ויהיו $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times m}$ הוכיחו כי $AB \neq I$ (כאשר $I \in \mathbb{F}^{m \times m}$ מטריצת היחידה מגודל $m \times m$).