# תרגיל 12

.1

(א) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$ ע"י: $x_1+y_1^2=x_2+y_2^2 \iff (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$.
הוכיחו ש $\mathbb{R}\cong\mathbb{R}^2/\sim$. רמז: מצאו את ההעתקה ההפוכה ל$\hat{f}$ מ$\mathbb{R}$ ל$\mathbb{R}^2/\sim$.

(ב) נגדיר יחס שקילות על $\mathbb{R}^2$: $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2 \iff (x_1,y_1)\sim(x_2,y_2)$.
למה הומיאומורפי $\mathbb{R}^2/\sim$?

2. יהי $X$ מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל מיחס השקילות הבא: $x\sim y \iff (x=y\vee x=-y)$. הוכיחו ש $X\cong[0,\infty)$.

3. יהי $X$ מרחב המנה של $\mathbb{R}$ המתקבל ע"י זיהוי כל הנקודות מנורמה גדולה שווה מ1. כלומר $x\sim y$ אמ"ם $x=y$, או ש $|x|\geq 1\wedge|y|\geq 1$. הוכיחו ש $X\cong S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$.

4. תנו דוגמא להעתקת מנה שהיא לא פתוחה ולא סגורה.

5. נתבונן ב$\mathbb{R}$ ובתת קבוצה שלו $S=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}$. נגדיר טופולוגיה על $\mathbb{R}$ באופן הבא: נאמר ש$C\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה אם $C=A\cup T$ עבור $A$ תת קבוצה סגורה של $\mathbb{R}$ בטופולוגיה האוקלידית, ו$T$ היא תת קבוצה כלשהי של $S$. הוכחתם בתרגיל בית 5 שהמשלימים של הקבוצות האלו יוצרים טופולוגיה על $\mathbb{R}$. נסמן את הטופולוגיה הזאת ב$\tau$.

(א) נאפיין את הקבוצות הפתוחות: הוכיחו כי $O\in\tau \iff O=B\cap T$ כאשר $B$ פתוחה בטופולוגיה האוקלידית ו$S^c\subseteq T$.

(ב) הוכיחו ש$\tau$ מכילה אצ הטופולוגיה האוקלידית, והסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ הוא האוסדורף.

(ג) הכאו שאם $O\in\tau$ כך ש $S\subseteq O$, אז $O$ פתוחה בטופולוגיה האוקלידית.

(ד) הוכיחו שלא קיימות $U,V$ פתוחות ב$\tau$ וזרות כך ש $V\subseteq S,U\ni 0$. הסיקו ש $(\mathbb{R},\tau)$ אינו $T_3$.