

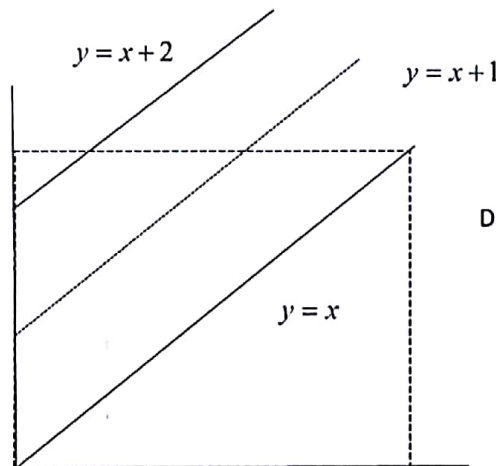
## תרגיל 8 – פתרון

1. יהי  $X = Y = \mathbb{R}$  ונסתכל על  $\mathbb{R}^2$  ביחס לסיגמא אלגברה בורל. נגדיר את הפונקציה

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \text{ and } x \leq y < x+1 \\ -1 & x \geq 0 \text{ and } x+1 \leq y < x+2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

הראו כי  $\iint f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \iint f(x, y) m(dy) m(dx)$ . מדוע אין זו סתירה למשפט פוביני?

פתרון:



נחשב:

$$h(y) = \int f(x, y) m(dx) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ \int_0^y 1 dm = y & 0 \leq y < 1 \\ \int_0^{y-1} -1 dm + \int_{y-1}^y 1 dm = 2 - y & 1 \leq y < 2 \\ \int_{y-2}^{y-1} -1 dm + \int_{y-1}^y 1 dm = 0 & 2 \leq y < \infty \end{cases}$$

ולכן :

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) m(dx) m(dy) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) dm = \int_0^1 y m(dy) + \int_1^2 (2-y) m(dy) = 1$$

מצד שני,

$$g(x) = \int f(x, y) m(dy) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_x^{x+1} 1 m(dy) + \int_{x+1}^{x+2} -1 m(dy) = 0 & x \geq 0 \end{cases}$$

ולכן

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) m(dy) m(dx) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dm = \int_{-\infty}^{\infty} 0 dm = 0$$

ומכאן ש

$$1 = \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) m(dx) m(dy) \neq \int \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) m(dy) m(dx) = 0$$

על מנת להראות כי אין סתירה למשפט פוביני, נראה כי  $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \infty$

נחשב את  $\int_D |f(x, y)| dm \times dm$  כאשר  $D_x$  הינו הריבוע בציור שצלעו באורך  $x$ . ברור כי

אינטגרל כפול על הפונקציה הינו השטח של הריבוע  $D_x$  פחות שני המשולשים. כלומר, אם גודל הריבוע הוא  $x^2$  אזי

$$\int_{D_x} |f(x, y)| dm \times dm = x^2 - \left( \frac{x^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2} \right) = 2x - 2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{D_x} |f(x, y)| dm \times dm = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x - 2 = \infty$$

נובע כי  $\int_{\mathbb{R}^2} |f(x, y)| dm \times dm = \infty$  מכאן כי תנאי משפט פוביני אינם מתקיימים ולכן אין סתירה.

$$2. \text{ הוכיחו כי } I = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

פתרון:

$$\text{נחשב: } I^2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \int_0^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dy dx$$

הפונקציה  $f(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$  הינה רציפה ולכן מדידה ביחס לסיגמא אלגברת לבג המכפלה. כמו כן היא חיובית ולכן ניתן להשתמש במשפט טונלי. לכן

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} m(dx)m(dy) = \int_{[0, \infty) \times [0, \infty)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} m \times m(dx, dy)$$

מכיוון ש  $f$  רציפה היא אינטגרבילית רימן לפחות במובן הרחב (כלומר האינטגרל יכול להיות שווה ל  $\infty$  . נוכל לעבור לקורדינאטות פולאריות

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

נקבל כי

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$.I = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ ומכאן ש}$$

3. תהי  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  מדידה לבג, הוכיחו את השוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x) = \int_0^{\infty} m(\{x: |f(x)| \geq t\}) dm(t)$$

פתרון:

לפי משפט טונלי:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dm(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{|f(x)|} 1 dm(t) \right] dm(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_0^{\infty} I_{\{(x,t): |f(x)| \geq t\}} dm(t) \right] dm(x) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_0^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): |f(x)| \geq t\}} dm(x) \right] dm(t) = \int_0^{\infty} m(\{x: |f(x)| \geq t\}) dm(t) \end{aligned}$$

הסיבה שמשפט טונלי תקף היא כי מדובר במידות לבג  $dm(x), dm(t)$  שהן שלמות ו- $\sigma$  סופיות. בנוסף יש לבדוק כי הפונקציה  $I_{\{(x,t): |f(x)| \geq t\}}$  מדידה במרחב המכפלה, וע"פ אחד מתרגילי

הבית הכרחי ומספיק להוכיח כי הקבוצה  $\{(x,t): |f(x)| \geq t\}$  מדידה " $L \otimes L$ ".

(נשתמש בסימון  $\otimes$  לסמן את  $\sigma$ -אלגברת המכפלה)

ובכן יהי  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ההעתקה  $x \mapsto |f(x)|$  מדידה (הרכבה של רציפה ומדידה), ולכן הקבוצה  $\{x \in \mathbb{R}: |f(x)| > \alpha\} = E_\alpha \in L$  ומכאן  $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2: |f(x)| > \alpha\} = E_\alpha \times \mathbb{R} \in L \otimes L$  (שהוא קבוצה מדידה!). קיבלנו אם כן כי ההעתקה  $(x,t) \mapsto |f(x)|$  מדידה  $L \otimes L$ .

הפונקציה  $t \mapsto t$  גם כן מדידה לבג ולכן  $\{t \in \mathbb{R}: t > \alpha\} = F_\alpha \in L$ , ומכאן

$\{(x,t): t > \alpha\} = \mathbb{R} \times F_\alpha \in L \otimes L$ . הפרש בין פונקציות מדידות הוא מדיד, ולכן

$(x,t) \mapsto |f(x)| - t$  מדידה. הקבוצה שלנו היא בדיוק  $[0, \infty) \cap \{|f| - t\}^{-1}$  ולכן מדידה.

4. תהי  $\mu$  מידה סופית על  $\mathbb{R}$ , ונגדיר  $\alpha(x) = \mu((-\infty, x])$ . הוכיחו כי

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x+c) - \alpha(x)] d\mu(x) = c\mu(\mathbb{R})$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha(x+c) - \alpha(x)] d\mu(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\mu((-\infty, x+c]) - \mu((-\infty, x])] d\mu(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mu((x, x+c]) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{x, x+c}^{\infty} d\mu(t) d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): x < t \leq x+c\}} d\mu(t) d\mu(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): t > x \geq t-c\}} d\mu(t) d\mu(x) \stackrel{\text{Tonelli}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_{\{(x,t): t > x \geq t-c\}} d\mu(x) d\mu(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} d\mu(t) = c\mu(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

תרגיל 5

נתון  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  - מעגל

$\mu := \frac{m}{2\pi}$  - מדידת הנעמלות על  $\mathbb{T}$  (גודל נורמליזציה)

$f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מציבורה -  $A \subseteq \mathbb{T}$  מדיבורה

$\int f d\mu = a$  - ע

$\mu(A) = b$  - יא

היכאן  $\mathbb{T}$  קיים סיבוב  $\theta$  של הקוציה  $A$  כגון  $\theta$ , שנסמך  $A_\theta$ .

כפ-ע

$$\int_{A_\theta} f d\mu \geq ab$$

פתרון:  $a < \infty$  וזק  $f \in L^1(\mathbb{T})$ .

זכ  $\theta \in [0, 2\pi)$  נגדיר:

$$h(\theta) = \int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) \mathbb{1}_A(e^{i(t+\theta)}) d\mu(t)$$

כאשר: סיבוב  $\theta$  של  $A$  כגון  $\theta$

$(h(\theta) = \int_{A_\theta} f d\mu$  ;  $|\cos|$ ) על הפרקציה הנסמכת  $f$  על אינטרוואל  $\theta$

$$\int_{\mathbb{T}} h(\theta) d\mu(\theta) = \int_{\mathbb{T}} \left( \int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) \mathbb{1}_A(e^{i(t+\theta)}) d\mu(t) \right) d\mu(\theta) = (*)$$

$H \otimes H$  - הפונקציה  $f$  היא פונקציה רגולרית,  $\mathbb{1}_A$  היא פונקציה רגולרית,  $f \in L^1(\mathbb{T})$  ו- $\mathbb{1}_A \in L^1(\mathbb{T})$ .

לפי משפט פובינג, נקבל:

$$(*) = \int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) \left( \int_{\mathbb{T}} \mathbb{1}_A(e^{i(t+\theta)}) d\mu(\theta) \right) d\mu(t) =$$

$\mu$  מכין  $\Rightarrow$   $\int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) \underbrace{\mu(\mathbb{T})}_b d\mu(t) = b \underbrace{\int_{\mathbb{T}} f(e^{it}) d\mu(t)}_a = ab$   
 אינטגרל רגולרי  
 = פונקציה רגולרית  
 סימבול

$\int_{\mathbb{T}} h = ab$  : קטע,  $\mu(\mathbb{T}) = 1$

$h(\theta) < ab$  :  $\theta \in [0, 2\pi)$  כל  $\theta$ , נכח

$$\int_{\mathbb{T}} h d\mu < \int_{\mathbb{T}} ab d\mu = ab$$

נסתכל ב-  $\int_{\mathbb{T}} h d\mu = ab$  (כמו שראינו)

$h(\theta) \geq ab$  -  $\theta \in [0, 2\pi)$  כל  $\theta$ , נכח

$\mu = \frac{m}{2\pi}$   
 כל  $m$  אינטגרל רגולרי  
 (המשפט)