אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 5

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. יהי חוג R יהיו שני אידיאלים $I, J \lhd R$ כך ש $I + J = R$. הוכח כי $I \cap J = IJ + JI$.
2. יהי חוג קומוטטיבי R יהיו שני אידיאלים $I, J \lhd R$ כך ש $I \cap J$ ראשוני. הוכח כי $J \subseteq I$ או $I \subseteq J$.
3. אמרו על האידיאלים הבאים מי מהם מקסימלי ומי ראשוני:
   a. $I = \{(0,n) : n \in \mathbb{Z}\} \lhd \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   b. $I = < 2x+1 > \lhd \mathbb{Z}[x]$.
4. הוכיחו כי $\mathbb{R}[x]/ < x^2 - 1 > \not\cong \mathbb{R}[x]/ < x^4 - 1 >$.
5. יהי חוג R עם אידיאל מקסימלי יחיד $M \lhd R$ [מה שנקרא חוג מקומי].
   a. הוכח כי כל איבר שלא נמצא באידיאל הפיך.
   b. יהי $f : R \to S$ אפימורפיזם עבור איזשהו חוג $S \neq 0$. הוכח כי S מקומי.
6. חוג R נקרא ראשוני למחצה אם לא קיים אידיאל $0 \neq I \lhd R$ כך ש $I^2 = 0$. אידיאל P בחוג כלשהו R נקרא ראשוני למחצה אם R / P הוא חוג ראשוני למחצה. הוכח כי $P \lhd R$ ראשוני למחצה אם ורק אם לכל $a \in R$, אם $aRa \subseteq P$ אז $a \in P$.
7. מצאו a חיובי שלם המקיים $a \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 11)$, $a \equiv 2 \ (\mathrm{mod}\ 9)$ ו$a \equiv 4 \ (\mathrm{mod}\ 5)$.