פתרון תרגיל 2

.1 **א.** לא, ל- 3 אין הופכי שהרי אין איבר x, ב $\mathbb{Z}_6$ המקיים 3*x=0 (עברו על כולם ובדקו!)

ב.

$*$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

$+$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

ג. $4^{-1} = 10\,,\ 5^{-1} = 8\ ,\ 6^{-1} = 11$

ד. $5x = 4$ (שהרי 9- ב $\mathbb{Z}_{13}$ הוא 4)

נכפיל את שני האגפים ב 5^{-1} (ב $\mathbb{Z}_{13}$ הוא 8) ונקבל

X=6 (שהרי 32 ב $\mathbb{Z}_{13}$ הוא6)

.2 בשדה לא יתכנו מחלקי אפס. נניח בשלילה שיש, כלומר שקיימים a,b שניהם שונים מ 0 אך *ab=0*

כיוון שזה שדה אז יש ל b הופכי. נכפיל את המשוואה משמאל ב b הופכי ונקבל $abb^{-1} = 0b^{-1}$ כלומר $a = 0$. סתירה!

.3

סעיף א':

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&1&1&2\\1&1&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&1&1&2\\0&0&2&-2\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&0&1&-1\\1&1&1&2\\0&0&2&-2\end{array}\right)\xrightarrow[\frac{1}{2}R_3\to R_3]{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&1&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

קיבלנו צורה מדורגת ולכן $x_3=-1$. נשים לב שיש שורת אפסים ולכן נסמן $x_2=t$ ונביע את x_1 באמצעות t: $x_1=3-t \Leftarrow x_1+t-1=2$ והתוצאה הסופית היא $x_1=3-t, x_2=t, x_3=-1$.

סעיף ב':

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&1&1&1\\1&1&1&2\\3&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&-1&-1&-3\\1&1&1&2\\3&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow[-R_1\to R_1]{R_2+R_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&3\\1&0&0&-1\\3&1&1&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-3R_2\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&3\\1&0&0&-1\\0&1&1&6\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&3\\1&0&0&-1\\0&0&0&3\end{array}\right)$$

קיבלנו משוואה מהצורה $0=3$ ולכן אין פתרון למשוואה.

סעיף ג':

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\3&-1&1&5&2\\2&1&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-3R_1\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&-7&-11&26&-7\\2&1&3&-2&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_1\to R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&-7&-11&26&-7\\0&-3&-5&12&-5\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&11&-26&7\\0&-3&-5&12&-5\end{array}\right)\xrightarrow{7R_3+3R_2\to R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&11&-26&7\\0&0&-2&6&-14\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_3\to R_3}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&11&-26&7\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-11R_3\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&7&0&7&-70\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{7}R_2\to R_2}\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&4&-7&3\\0&1&0&1&-10\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&4&-9&-17\\0&1&0&1&-10\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)\xrightarrow[3R_2+R_3\to R_2]{R_1-3R_3\to R_1}\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&1&0&-38\\0&1&3&0&-23\\0&0&1&-3&7\end{array}\right)$$

כעת, נשים לב שיש יותר משתנים ממשוואות לכן נסמן $w=t$ ונביע את המשתנים האחרים באמצעותו:

$$\begin{cases}z-3t=7\Rightarrow z=3t+7\\ y+9t+21=-23\Rightarrow y=-9t-44\\ x+3t+7=-38\Rightarrow x=-3t-45\end{cases}$$

והפתרון של המשוואה הוא $x=-3t-45,\ y=-9t-44,\ z=3t+7,\ w=t$.

שאלה 4:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&i&1+i&2\\-i&1&0&2\\1+i&0&1&2\end{array}\right)\xrightarrow[R_3+R_2-R_1\to R_3]{R_2+iR_1\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&i&1+i&2\\0&0&-1+i&2+2i\\0&1-i&-i&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&i&1+i&2\\0&1-i&-i&2\\0&0&-1+i&2+2i\end{array}\right)$$

ולכן קיים פתרון $z=\dfrac{2+2i}{-1+i}=\dfrac{2(1+i)(-1-i)}{-2}=(1+i)^2=2i$ נציב במשוואה השנייה לקבל $(1-i)y+2=2\Leftarrow y=0$. כעת, נציב במשוואה הראשונה $x+2i-2=2\Leftarrow x=4-2i$.

בסה"כ קיבלנו $x=2,y=0,z=2i$.

שאלה 5:

בהינתן מערכת עם שתי משוואות בשני נעלמים $\begin{matrix}a_1x+b_1y=c_1\\a_1x+b_1y=c_2\end{matrix}$:

א. אם $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ אז למערכת יש 0 פתרונות.

ב. אם $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ אז למערכת יש אינסוף פתרונות.

התשובה עבור a היא כל מספר השונה מ 14 למשל 1.
התשובה עבור b היא 14.

ג. נציב את הערך שקיבלנו בסעיף קודם במערכת:

$$3x+2y=7$$
$$6x+4y=14$$

$$-2R_1+R_2\to R_2$$

$$3x+2y=7$$
$$0x+xy=0$$

כדי לקבל פתרון כללי נציב במשוואה הראשונה y=t ואז $x=\frac{7}{3}-\frac{2}{3}t$.

באופן כללי הפתרון הוא: $\begin{pmatrix}\frac{7}{3} & -2t\\ 0 & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\ 1\end{pmatrix}$

<u>שאלה 6:</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\3&-4&-8&b_2\\1&3&6&b_3\\1&1&-1&b_4\end{array}\right)\xrightarrow[R_3-R_4\to R_3]{R_2-3R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-13&-26&b_2-3b_3\\0&2&7&b_3-b_4\\1&1&-1&b_4\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-R_1\to R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-13&-26&b_2-3b_3\\0&2&7&b_3-b_4\\0&-1&-3&b_4-b_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+2R_4\to R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-13&-26&b_2-3b_3\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&-1&-3&b_4-b_1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-13R_4\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&0&13&b_2-3b_3-13b_4+13b_1\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&-1&-3&b_4-b_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-1&-3&b_4-b_1\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&13&b_2-3b_3-13b_4+13b_1\end{array}\right)\xrightarrow{R_4-13R_3\to R_4}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-1&-3&b_4-b_1\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&0&b_2-16b_3+26b_1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2+3R_3\to R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&2&b_1\\0&-1&0&-4b_1+3b_3-2b_4\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&0&b_2-16b_3+26b_1\end{array}\right)\xrightarrow[-R_2\to R_2]{R_1+2R_2-2R_3\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-5b_1+4b_3-2b_4\\0&1&0&4b_1-3b_3+2b_4\\0&0&1&b_3-b_1-b_4\\0&0&0&b_2-16b_3+26b_1\end{array}\right)$$

כעת, נשים לב שאם $b_2-16b_3+26b_1\neq 0$ נקבל משוואה לא הגיונית ולכן נקבל לא יהיה פתרונות.

אחרת, יהיה פתרון מהצורה $x=-5b_1+4b_3-2b_4,y=4b_1-3b_3+2b_4,z=b_3-b_1-b_4$.

לכן, בסה"כ:

אם $b_2-16b_3+26b_1\neq 0$ אין פתרונות.

אם $b_2-16b_3+26b_1=0$ קיים פתרון יחיד מהצורה:

$x=-5b_1+4b_3-2b_4,y=4b_1-3b_3+2b_4,z=b_3-b_1-b_4$.

שאלה 7:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[2R_2-R_4\to R_2]{\frac{1}{3}R_3\to R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_4-R_1\to R_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 7 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4-2R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{2R_4-R_3\to R_4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{pmatrix} \xrightarrow[-\frac{1}{15}R_4\to R_4]{6R_1-R_3\to R_1} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_2-2R_4\to R_2 \\ R_3-R_4\to R_3}]{R_1-29R_4\to R_1} \begin{pmatrix} 24 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}R_2\to R_2 \\ \frac{1}{6}R_3\to R_3}]{\frac{1}{24}R_1\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$