פיתרון לתרגיל 9:

תשובה 1:

א. קל (מופיע בכל ספר אלגברה).

ב. יהי $\varphi \in Aut(G\times H)$ אזי $\varphi(G\times\{1\}) \leq G\times H$ כמו כ $\varphi(G\times 1)\cong G\times 1\cong G$
(חח"ע) עתה $|G_1\times H_1| = |G_1||H_1|$ ו- $\gcd(|G_1|,|H_1|)=1$ לכל $G_1<G, H_1<H$
עהה , מאחר ש $|\varphi(G\times\{1\})| = |G|$, משיקולי סדרים נקבל $\varphi(G\times 1) = G\times 1$. באופן
דומה מוכיחים $\varphi(1\times H) = 1\times H$ לכן הצימצום של φ ל $G\times 1$ ול- $1\times H$ מגדירים
$\varphi_G\in Aut(G)$ ו- $\varphi_H\in Aut(H)$. בכיוון ההפוך, בהינתן אוטומורפיזמים $\varphi_G\in Aut(G)$ ו-
$\varphi_H\in Aut(H)$.נגדיר $\varphi=\varphi_G\times\varphi_H\in Aut(G\times H)$.בצורה רכיבית.העתקות הנ"ל
מגדירות הומומורפיזמים הפוכים.

הדוגמא: $Aut(Z_2)=Z_2$ אבל $Aut(Z_2\times Z_2)\cong S_3\ncong Z_2\times Z_2$.

תשובה 2:

נניח בשלילה ש $G=H_1H_2$ היא מכפלה ישרה של H_1 ו- H_2 כך שהן שונות מ – $\{1\}$.

אזי $|H_2|=p^{s_2}$ ו- $|H_1|=p^{s_1}$ באשר $r=s_1+s_2$. נניח בלי הגברת הכלליות ש $0<s_2\leq s_1<r$. יהי $a\in G$ איבר מסדר p^r ונרשם $a=b_1b_2$ נאשר $b_i\in H_i$.

מאחר ש $p^{s_2}|p^{s_1}$ נובע ש $a^{p^{s_1}} = {b_1}^{p^{s_1}}\left({b_2}^{p^{s_2}}\right)^{\frac{p^{s_1}}{p^{s_2}}} = 1\cdot 1 = 1$ בסתירה לכך ש $p^{s_1}<p^r$.

תשובה 3:

א. אנו יודעים שלאקספוננט ולסדר של חבורה אבלית יש אותם גורמים ראשוניים. כאן 5 הוא גורם ראשוני של 240 אך אינו מחלק את 18 (דהיינו לא גורם ראשוני של 18) לכן אין חבורה אבלית המקיימת את הדרישה.

ב. הסדר של איבר $x=(a_1,\ldots,a_n)\in Z_{t1}\times\ldots\times Z_{tn}$ הוא $|x| = lcm(|a_1|,\ldots,|a_n|)$.
מאחר ו- $Z_2\times Z_6\times Z_{30}$ מופיע כבר בצורה הקנונית. רואים ישירות שכל איבר צריך לחלק את הסדר של הגורם הגדול בפירוק , Z_{30} , דהיינו הסדרים האפשריים מחלקים את 30:
סה"כ צריך לבדוק את 30,15,10,6,5,3,2,1
ראשית נשים לב ש $6=2\cdot 3$, $30=2\cdot 3\cdot 5$. מאחר ושני הפירוקים מכילים רק ראשוניים זרים מחזקה 1 , לפי מה שלמדנו $Z_{30}\cong Z_2\times Z_3\times Z_5$ ו- $Z_6\cong Z_2\times Z_3$ לכן נקבל ש $Z_2\times Z_6\times Z_{30}\cong Z_2\times Z_2\times Z_2\times Z_3\times Z_3\times Z_5$. עבור איבר מסדר $30=2\cdot 3\cdot 5$ צריך לבחור איבר מסדר 2 מתוך $2^3-1=7$ האפשרויות הקיימות. איבר מסדר 3 מתוך $3^2-1=8$ האפשרויות הקיימות ואיבר מסדר 5 יש 4 אפשרויות : סה"כ $7\cdot 8\cdot 4=224$ איברים . באותו אופן יש $8\cdot 4=32$ איברים מסדר $15=3\cdot 5$. יש $7\cdot 4=28$ איברים מסדר $10=2\cdot 5$, יש $7\cdot 8=56$ איברים מסדר $6=2\cdot 3$. , יש 4 איברים אחד מסדר 5 , 8 איברים מסדר 3 , 7 איברים מסדר 2 ואיבר בודד מסדר 1 . סה"כ
$1+7+8+4+56+28+32+224 = 360$ איברים

תשובה 4:

ראשית נתבונן באיבר כללי $x=(a,b)$ בחבורה $G=\mathrm{Z}_2\times\mathrm{Z}_8$ באשר $a\in Z_2, b\in Z_8$. לפי מה שלמדנו ניתן לחשב את סדר האיבר עפ"י הסדרים של רכיביו באופן הבא: $|x|=lcm(|a|,|b|)$.

לפיכך ישנם 8 איברים מסדר 8 שהם $\{(a,b): a\in\{0,1\}, b\in\{1,3,5,7\}\}$, 4 איברים מסדר 4 שהם $\{(a,b): a\in\{0,1\}, b\in\{2,6\}\}$, 3 איברים מסדר 2 $\{(0,4),(1,4),(1,0)\}$ וכמובן איבר אחד (הנייטרלי) מסדר 1 שהוא $(0,0)$. יהי $f: G\to G$ אוטומורפיזם. אזי f נקבע עפ"י פעולתו על קבוצה יוצרת של G. בפרט, נוכל לבחור את הקבוצה היוצרת ליהיות $\{(1,0),(0,1)\}$. לכן נוכל למצא את כל האוטומורפיזמים עפ"י פעולתם על $\{(1,0),(0,1)\}$. בנוסף, אנו יודעים שאוטומורפיזם, בהיותו איזומורפיזם שומר על סדרי האיברים ב- G במובן שלכל $g\in G$ $|f(g)|=|g|$. אנו טוענים שלכל אוטומורפיזם f, מתקיים ש $f\big((0,4)\big)=(0,4)$. נוכיח זאת.

מאחר ש f שומרת על סדרי איברים ומאחר ש $|(1,0)|=2$ גם $\left|f\big((1,0)\big)\right|=2$ לכן לפי הרשום למעלה $f\big((1,0)\big)\in\{(0,4),(1,4),(1,0)\}$. מאותה סיבה בדיוק נקבל ש $f\big((0,1)\big)\in\{(a,b): a\in\{0,1\}, b\in\{1,3,5,7\}\}$. עתה, מאחר ש f הומומורפיזם מתקיים ש $f\big((0,4)\big)=f\big(4\cdot(0,1)\big)=4\cdot f\big((0,1)\big)=(0,4)$, הרכיב השמאלי של $f\big((0,1)\big)$ נמצא ב Z_2– לכן בהכרח מתאפס, בנוסף, הרכיב הימני חייב ליהיות מסדר 8 כי $f\big((0,1)\big)$ לכן אם מעלים בחזקה רביעית (כאן משמעה כפל כי אנחנו בחבורה חיבורית) מקבלים איבר מסדר $2=\frac{8}{4}$ ב- Z_8 . יש רק איבר אחד כזה והוא 4. (למען הסר ספק בידקו לכל ערך אפשרי של $f\big((0,1)\big)$ כמצויין לעיל).

מאחר ש- f חח"ע מקבלים ש $f\big((1,0)\big)\in\{(1,4),(1,0)\}$. נשים לב שאם $f\big((1,0)\big)=(4,0)$ אזי $f\big((1,4)\big)=f\big((1,0)\big)+4f\big((0,1)\big)=(0,4)+(0,4)=(0,0)$.

דרך לראות את האוטומורפיזמים: $Z_2\cong 4Z_8$ לכן ניתן לזהות את Z_2 עם האיברים $\{0,4\}$ ב – Z_8. לכן ניתן להציג כל אוטומורפיזם בצורה המטריצית הבאה $\begin{pmatrix}\mathrm{a}_{11} & \mathrm{a}_{12}\\ \mathrm{a}_{21} & \mathrm{a}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}$ כאשר אברי המטריצה ב - Z_8 והעמודות מייצגות את האיברים ב- $Z_8\times Z_8$ אליהם מועתקים 2 היוצרים באשר $a_{12}, a_{11}\in\{0,4\}=4Z_8$ ו- $a_{21}\in\{0,4\}, a_{22}\in\{1,3,5,7\}$ (מהשיקולים שפורטו למעלה) כאשר $x,y\in Z$ הן החזקות שבהן נלקחים היוצרים.לדוגמא במקרה שצויין לעיל נקבל $\begin{pmatrix}0 & \mathrm{a}\\ 4 & \mathrm{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{x}\\ \mathrm{y}\end{pmatrix}$ באשר $\{(a,b): a\in\{0,4\}, b\in\{1,3,5,7\}\}$ והראינו ש $\begin{pmatrix}0 & \mathrm{a}\\ 4 & \mathrm{b}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$. בצורה זו תוכלו לעבור על כל האפשרויות, ואם עבור מטריצת ערכים מסויימת תקבלו וקטור ב $Z\times Z$ שהולך ל-$(0,0)$ תדעו שזהו לא אוטומורפיזם. אחרת, אם יש חד חד ערכיות, משיקולי הסדרים של האיברים בעמודות המטריצה (2 ו- 8 בהתאמה) אנחנו יודעים שהתמונה היא מסדר 16, לכן על.

סה"כ יש 8 אפשרויות לערכים עבור $f\big((0,1)\big)$ ו- 2 אפשרויות עבור $f\big((1,0)\big)$. סה"כ $8\cdot 2=16$ אוטומורפיזמים שונים (אברי הקבוצה היוצרת מועתקים לאיברים שונים).

תשובה 5:

א. בסוגריים הימניים הפירוק ובשמאליים הפירוק הקנוני. החבורות השונות מופרדות בפסיקים. (הסימון: $(2^5,3^3,5)$ משמעו $Z_{2^5}\times Z_{3^3}\times Z_5$)

$(2^3,2,2,3^3,5)$, $(4,1080)$ $(2^3,2^2,3^3,5)$, $(2,2160)$ $(2^4,2,3^3,5)$, (4320) $(2^5,3^3,5)$
$(2,2,2,2,2,3^3,5)$, $(2,2,2,540)$ $(2^2,2,2,2,3^3,5)$, $(2,5,540)$ $(2^2,2^2,2,3^3,5)$, $(2,2,1080)$
$(12,360)$ $(2^3,2^2,3^2,3,5)$, $(6,720)$ $2^4,2,3^2,3,5)$, $(3,1440)$ $(2^5,3^2,3,5)$, $(2,2,2,2,270)$
, $(2,2,6,180)$ $(2^2,2,2,2,3^2,3,5)$, $(2,12,180)$ $(2^2,2^2,2,3^2,3,5$, $(2,6,360)$ $(2^3,2,2,3^2,3,5)$,
, $(3,6,240)$ $(2^4,2,3,3,3,5)$, $(3,3,480)$ $(2^5,3,3,3,5)$, $(2,2,2,6,90)$ $(2,2,2,2,2,3^2,3,5)$
, $(6,12,60)$ $(2^2,2^2,2,3,3,3,5)$, $(6,6,120)$ $(2^3,2,2,3,3,3,5)$, $(3,6,240)$ $(2^3,2^2,3,3,3,5)$
$(2,2,6,6,30)$ $(2,2,2,2,2,3,3,3,5)$, $(2,6,6,60)$ $(2^2,2,2,2,,3,3,3,5)$

ב. $U_{30}=\{1,7,11,13,17,19,23,29\}$, זוהי חבורה אבלית עם 8 איברים. ניתן לבדוק את סדרי האיברים, ולראות שהם 2 או 4 (או 1) בלבד. כמו כן ניתן לראות שיש שתי תתי-חבורות שחיתוכן הוא 1 מסדרים 2 ו-4. $\{1,7,13,19\}$ ו - $\{1,11\}$ (הזכרו בהגדרת מכפלה חיצונית ישרה).משני הנימוקים ניתן לקבל ש- $Z_8=Z_4\times Z_2$.

תשובה 6:

א. לא נכון . הן כלל לא מאותו סדר.

ב. $3^3=27$ ולכן צריך למצוא פולינום אי פריק מדרגה 3 מעלZ_3. דוגמא לפולינום כזה היא $f(x)\ =\ x^3+2x+1$ (בדקו ש- 0,1,2 אינם שורשים של f). מאחר ש f אי-פריק , חבורת המנה $Z_3[x]/(Z_3[x]\,f)$ עם הכפל המוגדר על הקוסטים החיבוריים היא שדה שנוצר כמרחב וקטורי מעל Z_3ע"י הקוסטים $\{\bar{1}=1+Z_3[x]\,f,\ \bar{x}=x+Z_3[x]\,f,\ \bar{x}^2=x^2+Z_3[x]\,f\}$.

תשובה 7:

א. הפולינום x^4-1 בהחלט פריק מעל Z_5. Z_5 הוא שדה סופי מסדר 5.
לכן $Z_5\backslash\{0\}$ היא חבורה ציקלית כפלית (לפי משפט) (כפי שאנו יודעים כבר מתורת החבורות במקרה ספציפי זה)מסדר 4. בפרט סדר של כל איבר חלק את סדר החבורה, לכן $a^4=1$ לכל $a\epsilon Z_5\backslash\{0\}$ לכן כל איבר ב $Z_5\backslash\{0\}$ הוא שורש של הפולינום. דהיינו $x^4-1=$ $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
מעל Z_5 זהו בדיוק הפולינום $(x^2+1)(x^2-1)=(x+1)(x+2)(x-2)(x-1)$

ב. לא נכון. $F_9\backslash\{0\}$ היא חבורה ציקלית ביחס לכפל מסדר 8 , דהיינו $F_9\backslash\{0\}\cong Z_8$ שאינה איזומורפית ל $Z_4\times Z_2$ (האקספוננט שונה כמובן).

תשובה 8:

א. ניתן להראות זאת ע"י הצבת כל ערכי Z_5 ב- $x^2 - 2$ והבחנה שאף אחד מהם אינו שורש.

ב. נשים לב ש- $f(x) = x^2 + x + 1$ הוא פולינום אי פריק מעל Z_5 ולכן $Z_5[x]/(Z_5[x]\ f)$ הוא שדה מסדר 25 שבו יש שורש ל-f (השורש הוא $a = x + (Z_5[x]\ f)$). אבל קיים רק שדה אחד מסדר 25 (עד כדי איזומור') ולכן $Z_5[x]/(Z_5[x]\ f)$ איזומורפי ל- $Z_5[x]/(Z_5[x]\ (x^2-2))$, ז"א שב- $Z_5[x]/(Z_5[x]\ (x^2-2))$ יש פתרון למשוואה f(a)=0.