

תורת הקבוצות – תרגיל בית 2 – תרגילי הרשות פתרונות

חיים שרגא רוזנר

י"א באייר, תשע"ה

תקציר

סודרים.

• תרגיל רשות: ההגדרה שלנו לסודר היא: α הוא סודר אם

1. היחס \in על α הוא יחס אנטי-רפלקסיבי.
2. יחס זה הוא טרנזיטיבי.
3. לכל תת-קבוצה לא ריקה A של α יש איבר ראשון ביחס השייכות, דהיינו איבר $\gamma \in A$ כך שלכל $\beta \in A$ מתקיים $\beta \in \gamma$ או $\gamma = \beta$.
4. הקבוצה α היא \in -טרנזיטיבית.

ראינו בשאלה הקודמת ש-(ד) לבדו איננו מספיק כדי להראות שקבוצה היא סודר, ואנו נזקקים לבדוק את דרישות (ב) ו-(ג). האם ניתן לוותר על אחת משתי דרישות אלו? לדוגמא, האם קבוצה $A \in$ -טרנזיטיבית הסדורה בסדר מלא על ידי \in היא בהכרח סודר?¹

פתרון ניתן להסתפק בדרישה שהקבוצה (α, \in) היא \in -טרנזיטיבית ושהיחס \in על הקבוצה הוא טריכוטומי. במקרה זה עלינו להראות ששעיפים (א)-(ג) נובעים מהנתונים (יחד עם אקסיומת היסודיות). אקסיומת היסודיות קובעת כי לכל קבוצה לא ריקה A קיים איבר $x \in A$ כך שלכל $y \in A$, $y \notin x$.

1. אנטי-רפלקסיביות: נובעת ישירות מיסודיות. נניח בשלילה $x \in x$, עבור $x \in \alpha$. אזי הקבוצה $\{x\}$ היא קבוצה לא ריקה, והיא סותרת את היסודיות.
2. טרנזיטיביות: יהיו $x \in y \in z$, $x, y, z \in \alpha$. מטריכוטומיות מתקיים $x \in z$, $x = z$ או $z \in x$. נשלול את שתי האפשרויות האחרונות:
 $x = z \wedge x \in y \in x$, והקבוצה $\{x, y\}$ סותרת את היסודיות.
 $z \in x \wedge x \in y \in z \in x$, והקבוצה $\{x, y, z\}$ סותרת את היסודיות.
3. סדר טוב: תהי A תת-קבוצה לא ריקה של α . אזי לפי היסודיות קיים בה איבר $\gamma \in A$ כך שלכל $\beta \in A$, $\beta \notin \gamma$. כעת, מטריכוטומיות, מתקיים $\gamma = \beta$ או $\gamma \in \beta$, כנדרש.

¹ בעתיד אנו צפויים להגיע לאקסיומת היסודיות. מאקסיומת היסודיות ניתן להסיק שלכל קבוצה A , $A \notin A$. בפרט, אם לוקחים את אקסיומת היסודיות, אז ניתן לוותר על דרישה (א).

מצאנו אפוא כי טריכוטומיות יחד עם ε -טרנזיטיבית גוררת את הנדרש. כעת, ניתן להראות כי דרישה (ג) כפי שנוסחה על ידינו גוררת טריכוטומיות: יהיו $x, y \in \alpha$, עלינו להראות כי הם מתייחסים באיזו צורה ביחס ε . נביט בקבוצה הלא ריקה $\{x, y\}$. לפי (ג) יש לה איבר ראשון, בה"כ x הוא הראשון. אזי מתקיים עבור $y \in \{x, y\}$ אחד מהשניים: $x = y$ או $x \in y$. בפרט x מתייחס אל y , והיחס הוא טריכוטומי. לכן (ג) + (ד) מספיקים.² גם אם נוותר על (ג) ועל טריכוטומיות, (ב) + (ד) יספיקו יחדיו. מאקסיומת היסודיות נובע שניתן לבנות את אוסף כל הקבוצות. לכל סודר α נגדיר את הקבוצה $R(\alpha)$ כך:

$$R(\alpha) := \begin{cases} \emptyset & \alpha = 0 \\ P(R(\gamma)) & \alpha = \gamma + 1 \\ \bigcup \{R(\gamma) : \gamma < \alpha\} & \alpha \text{ is a limit.} \end{cases}$$

אוסף כל הקבוצות הוא האיחוד על כל הסודרים של קבוצות אלו: $V = \bigcup \{R(\alpha) : \alpha \in \mathbf{ON}\}$. בדרך זו ניתן להוכיח טענות על כל הקבוצות באינדוקציה. אנו טוענים כי לכל סודר α , כל קבוצה $A \in R(\alpha)$ שהיא ε -טרנזיטיבית והיחס ε טרנזיטיבי עליה היא סודר. נראה באינדוקציה על α :

$\alpha = 0$. נכון באופן ריק.

$\alpha = \gamma + 1$. תהי $A \in R(\alpha)$ קבוצה ε -טרנזיטיבית והיחס ε טרנזיטיבי עליה. לפי מה שהראינו קודם מספיק להראות טריכוטומיות של ε על קבוצה זו. אם כן, יהיו $x, y \in A$, נראה שהם מתייחסים זה לזה ביחס השיכות. מכיוון ש- ε יחס טרנזיטיבי על A , אז כל איבר של A הוא ε -טרנזיטיבי וכן היחס ε טרנזיטיבי עליו. בפרט עבור x, y שני אלה מתקיימים. כעת, $A \in R(\alpha) = P(R(\gamma))$, ולכן $x, y \in A \subseteq R(\gamma)$, ולפי הנחת האינדוקציה x, y סודרים. הוכחנו כבר טריכוטומיות של סודרים, ולכן $x \in y$ או $y \in x$ או $x = y$. בכך הראינו ש- A סודר, כנדרש.

α גבולי. אז מהגדרת $R(\alpha)$ כאיחוד, קיים $\gamma \in \alpha$ עבורו $A \in R(\gamma)$; שם לפי הנחת האינדוקציה, הטענה כבר מתקיימת.

לסיכום, בעזרת אקסיומת היסודיות ניתן לוותר על דרישה (א) כלל ועיקר, וניתן להסתפק ב-(ד) יחד עם כל אחת מהדרישות האחרות: היחס ε על הקבוצה הוא יחס טרנזיטיבי, יחס זה טריכוטומי³ או תכונת הסדר הטוב כפי שניסחנו אותה בסעיף (ג). ■

• תרגיל רשות: נמקו מדוע מחלקת כל הסודרים ON איננה קבוצה.

פתרון מחלקת כל הסודרים היא ε -טרנזיטיבית, והיחס ε הוא יחס טריכוטומי עליה. לכן, לפי השאלה הקודמת, היא עונה על כל הקריטריונים להגדרת סודר, למעט היותה קבוצה. נניח אפוא כי היא קבוצה, אם כן היא סודר, ולכן היא שייכת למחלקת כל הסודרים. סה"כ מצאנו $ON \in ON$, וזו סתירה לאנטי-רפלקסיביות הסדר ε על סודרים. ■

² תודה לבת-חן סרי שמצאה את עיקר תשובה זו.
³ במובן החלש, דהיינו מתקיים לפחות אחד משלושת המצבים.