תרגול 7 - אנליזה הרמונית ופונקציה אופיינית - תשע"ט

7 באפריל 2019

- **<u>הקדמה</u>**

1. התמרת פורייה או טרנספורם פורייה היא כלי מרכזי באנליזה הרמונית שאפשר לתאר פונקציה אינטגרבילית, כפירוק של פונקציה לרכיבים מחזוריים. ההתמרה מאפשרת כתיבה של פונקציה נתונה בתור סכום של פונקציות מחזוריות (למשל $sin(x), cos(t)$).

2. תורת פוריה משמשת לתחומים מגוונים מפתרון משוואות דיפרנציאליות ועד ניתוח צלילים ועיבוד תמונה. לצרכינו, נשתמש בתכונה יסודית של התמרת פוריה, והיא "הפיכות" - הדבר יאפשר לנו להשתמש בכוח של **<u>הפונקציה האופיינית</u>** בכך שבאמצעותה ניתן לשחזר את ההתפלגות של המשתנה המקרי.

- **<u>פונקציה אופינית</u>**

1. **הפונקציה האופיינית** (CF) היא פונקציה $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ המקיימת $\varphi(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta X} dF$ ואם יש פונקצית צפיפות ל-X, אז מתקיים $\varphi(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta X} f_x(X) dX$. כלומר $\varphi(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta X}]$. נשים לב כי $\varphi(-i\theta) = \mathbb{E}[e^{\theta X}] = M_X(\theta)$ הכללה של פונקציה יוצרת מומנטים. ההבדל הוא שהפונקציה האופיינית **תמיד קיימת** כי $e^{i\theta X}$ תמיד חסומה ($\mathbb{P}$ מידה סופית).

2. **תרגיל** - יהי $X \sim N(0,1)$ חשב את המומנט הרביעי של X.
פתרון
X מתפלג נורמלית, לכן מטבלת ההתפלגויות הידועות מתקיים

$$\frac{d}{d^4\theta}(\varphi(\theta)) = \frac{d}{d^4\theta}(e^{-\frac{1}{2}\cdot\theta^2}) = \frac{d}{d^4\theta}\mathbb{E}[e^{i\theta X}] = \mathbb{E}[X^4 \cdot e^{i\theta X}]$$

.

$$\mathbb{E}[X^4] = \frac{d}{d^4\theta}(e^{-\frac{1}{2}\cdot\theta^2})|_{\theta=0} = 3$$

3. **תכונות חשובות - יהי $\varphi(\theta)$ פונקציה אופיינית של X אזי:**

(א)

$$\varphi(0) = \mathbb{E}[e^{i0X}] = \mathbb{E}[1] = 1$$

(ב)

$$|\varphi(\theta)| = |\mathbb{E}[e^{i\theta X}]| \leq \mathbb{E}[|e^{i\theta X}|] = \mathbb{E}[1] = 1$$

ואז

$$|\varphi(\theta)| \leq 1$$

.

(ג)

$$\varphi_X(-\theta) = \overline{\varphi_X(\theta)}$$

(ד)

$$\varphi_{aX+b}(\theta) = \mathbb{E}[e^{i\theta(aX+b)}] = \mathbb{E}[e^{i\theta(aX)} \cdot e^{i\theta b}] = e^{i\theta b} \cdot \mathbb{E}[e^{i(a\theta)X}] =$$

$$e^{i\theta b} \cdot \mathbb{E}[e^{i(a\theta)X}] = e^{i\theta b} \cdot \varphi_X(a\theta)$$

(ה) אם X, Y משתנים מקריים בלתי תלויים אזי $\varphi_{X+Y}(\theta) = \varphi_X(\theta)\varphi_Y(\theta)$.

4. **תרגיל**

הראה כי במצב בו הפונקציה האופיינית מקבלת ערכים ממשיים בלבד. (כלומר עבור X משתנה מקרי המתקיים כי $\forall_\theta\, \varphi(\theta) \in \mathbb{R}$) אז X מתפלג סימטרית סביב 0.

פתרון

נתון כי $\forall_\theta\, \varphi(\theta) \in \mathbb{R}$ לכן, מתקיים $\varphi_X(\theta) = \overline{\varphi_X(\theta)}$. אבל גם מתקיים $\varphi_{-X}(\theta) = \varphi_X(-\theta) = \overline{\varphi_X(\theta)} = \varphi_X(\theta)$. כלומר ל- X ול- $-X$ יש את אותה פונקציה אופיינית.

(א) **הערה -** הפונקציה האופיינית קובעת את ההתפלגות (על פי פונקציית ההצטברות) של משתנה מקרי באופן יחיד.

i. יהי

$$\varphi(\theta)=\int\limits_{\mathbb{R}} e^{i\theta X}f_x(X)dX.=\mathbb{E}[e^{i\theta X}]$$

פונקציה אופיינית של משנה מקרי X. זוהי "התמרת פוריה לא מנורמלת של פונקציית הצפיפות של X. לכן, ניתן לבצע התמרת פוריה הפוכה. מההרצאה:
"המשפט ההפוך של פלר" -

$$F(x)-F(a)=\lim_{\epsilon\to 0^+}\int\limits_a^x(\frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\varphi(t)e^{-\frac{-\epsilon^2t^2}{2}}dt)dx$$

. על פיו מוגדרת פונקציית ההצטברות המתאימה. (הדבר נכון גם לגבי משתנה מקרי ללא פונקציית הצטברות).

(ב) **מסקנה -** X משתנה מקרי המתפלג באפן סימטרי סביב 0:

i. $\mathbb{P}(X\le 0)=\mathbb{P}(-X\ge 0)=\mathbb{P}(X\ge 0)$ כי מתקיים $\varphi_{-X}(\theta)=$ $\varphi_X(\theta)$.

5. **הערה מההרצאה - מתקיים $X_n\xrightarrow{d}X$ אם ורק אם $\varphi_{X_n}(\theta)\to\varphi_X(\theta)$ (תוצאה זאת יעילה מאוד להוכחת משפט הגבול המרכזי - עליו נדון בשיעור הבא).**

- **<u>כמה מילים על קונבולוציה.</u>**

1. **הגדרה -** אם f,g פונקציות מדידות אזי $(f*g)(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}f(x-t)g(t)dt$
2. יהיו X,Y 2 משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי:

(א) $F_{X+Y}=F_X*F_Y$

(ב) $F_{X\cdot Y}=F_X\cdot F_Y$

3. **הערה -** המשפט נכון גם על פונקציות צפיפות!

4. **תרגיל**
יהיו $X,Y\sim U(0,1)$ משתנים מקריים בלתי תלויים. חשבו $f_{X+Y}(t)$ (נקרא גם $triangular\ distribiution$)
פתרון
מהמשפט נתון

$$f_{X+Y}(z)=(f_X*f_Y)(z)=\int_{\mathbb{R}}f_X(z-t)f_Y(t)dt$$

נזכור כי

$$f_X(t)=f_Y(t)=\begin{cases}1 & 0\le t\le 1\\ 0 & else\end{cases}$$

.
נחלק למקרים:
א. $0\le t\le 1$:

$$f_{X+Y}(z)=\int_0^1 f_X(z-t)dt=\int_z^{z-1}-f_X(k)dk=$$

$$\int_{z-1}^{z}f_X(k)dk=\begin{cases}\int_0^z f_X(k)dk=z & 0\le z\le 1\\ \int_{z-1}^{1}f_X(k)dk=2-z & 1\le z\le 2\\ 0 & else\end{cases}$$

ב. עבור $t\notin[0,1]$ מתקיים:

$$f_{X+Y}(z)=0$$

ואם נסכם:

$$f_{X+Y}(z)=\begin{cases}z & 0\le z\le 1\\ 2-z & 1\le z\le 2\\ 0 & else\end{cases}$$