

פתרון תרגיל 7

שאלה 1

הוכח או הפוך :

- א. אם $f(x) + g(x)$ רציפה ב- x_0 אז גם $f(x), g(x)$ רציפות ב- x_0 .
- ב. אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 אזי $f(x) + g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 .
- ג. אם $f(x)$ רציפה ב- x_0 ו- $g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 אזי $f(x) - g(x)$ אינה רציפה ב- x_0 .
- ד. אם $f(x)$ גזירה ו- $g(x)$ רציפה ב- x_0 אזי $f(x) + g(x)$ רציפה ב- x_0 .
- ה. אם $f(x)$ גזירה ו- $g(x)$ רציפה ב- x_0 אזי $f(x) + g(x)$ גזירה ב- x_0 .

פתרון:

(א) הטענה אינה נכונה

דוגמה נגדית:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & x < 0 \\ -1+x & x \geq 0 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} 1+x & x < 0 \\ -1+x & x \geq 0 \end{cases}$$

שתי הפונקציות אינן רציפות ב-0 אבל הסכום שלהן $2x$ כן רציפה שם

(ב) הטענה נכונה

נניח בשלילה ש- $f(x) + g(x) = h(x)$ רציפה ב- x_0 אזי $g(x) = h(x) - f(x)$ תהיה

רציפה, סתירה

(ג) הטענה אינה נכונה,

דוגמה נגדית:

$f(x) = 0$ בכל x ממשי והיא גם רציפה בנקודה 0

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ -1 & x > 0 \end{cases}$$

ב-0 $x = 0$ אינה רציפה ב-0, אבל המכפלה $f(x) \cdot g(x) = 0$ כל רציפה

ד) הטענה נכונה,

אם $f(x)$ גזירה אז היא גם רציפה ואז באריתמטיקה של פונקציות רציפות גם $f(x) + g(x)$ רציפה.

ה) הטענה לא נכונה,

דוגמא נגדית:

$f(x) = x$ בכל x היא פונקציה גזירה בפרט בנקודה 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = -1 \text{ כי } 0 \text{ היא לא גזירה ב-} 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x-0} = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)+g(x)-f(0)-g(0)}{x-0} = 0 \text{ כי } 0 \text{ היא לא גזירה ב-} 0$$

שאלה 2

מצאו את קבוצות כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות רציפות:

$$א. f(x) = \frac{x+2}{(x-1)(x-3)^{1/3}}$$

פתרון: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ בתחום זה הפונקציה רציפה כמכפלה ומנה של פונקציות

רציפות.

$$ב. f(x) = \sqrt[4]{x^2 - x^3}$$

פתרון: $D(f) = (-\infty, 1]$

הפונקציה רציפה בהרכבה של פונקציות רציפות לכל נקודה $x < 1$.

הפונקציה גם רציפה בנקודה 1 כי $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$

$$ג. f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & x \geq 2, x \neq 4 \\ \frac{2}{3} & x = 4 \end{cases}$$

פתרון: $D(f) = [2, \infty)$ לכל $x \in [2, 4) \cup (4, \infty)$ הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של

פונקציות רציפות.

נבדוק האם הפונקציה רציפה ב- $x = 4$:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{2x+1}-3)(\sqrt{2x+1}+3)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})(\sqrt{2x+1}+3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2x-8)(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(x-4)(\sqrt{2x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(\sqrt{x-2}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2x+1}+3)} = sf \left(\frac{2(\sqrt{2+\Delta x}+\sqrt{2})}{\sqrt{9+2\Delta x}+3} \right) = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

כאשר $x = 4 + \Delta x, \Delta x \approx 0, \Delta x \neq 0$.

קיבלנו $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \neq \frac{2}{3} = f(4)$ ולכן $x = 4$ נקודת אי רציפות סליקה.

שאלה 3

מצאו את נקודות אי הרציפות של הפונקציות הבאות וקבעו את סוג אי הרציפות:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \quad \text{א.}$$

פתרון: $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כמנה והרכבה של פונקציות רציפות.

נבדוק את סוג אי הרציפות ב- $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$$

קיבלנו מספר אינפיניטסימלי חלקי מספר סופי שאינו אינפיניטסימלי ולכן הגבול אפס.

הגבול קיים, אך הפונקציה לא מוגדרת בנקודה ולכן $x=0$ נקודת אי רציפות סליקה.

$$f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} \quad \text{ב.}$$

פתרון: $D(f) = [-7, \infty) \setminus \{-2, 2\}$. בכל תחום ההגדרה הפונקציה רציפה כהרכבה

ומנה של פונקציות רציפות

נקודות אי רציפות הן $x = \pm 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{7+x}-3)(\sqrt{7+x}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{7+x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{7+x-9}{(x-2)(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(x+2)(\sqrt{7+x}+3)} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

הגבול קיים וסופי ולכן $x=2$ נקודת אי רציפות סליקה.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{(x-2)(x+2)} = st \left(\frac{\sqrt{5+\Delta x}-3}{\Delta x(-4+\Delta x)} \right)$$

כאשר $x = -2 + \Delta x$, $\Delta x \approx 0$, $\Delta x > 0$ הינו מספר

אינסופי ולכן החלק הסטנדרטי שלו לא מוגדר ולכן הגבול מימין בנקודה $x = -2$ אינו קיים

ולכן $x = -2$ נקודת אי רציפות מסוג שני.

שאלה 4

עבור איזה ערך של a פונקציה הבאה תהיה רציפה בנקודה $x = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 2 & x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} & x > 0 \end{cases}$$

פתרון:

נשים לב שהפונקציה רציפה בכל $x \neq 0$.

נבדוק רציפות בנקודה $x = 0$, נרצה שיתקיים:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (5x + 2) = 2$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{1+ax^2}-1}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{1+ax^2}+1}{\sqrt{1+ax^2}+1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax^2}{x^2(\sqrt{1+ax^2}+1)} = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

ולכן כדי שהגבול יהיה קיים נדרוש ש- $2 = \frac{a}{2}$ ולכן $a = 4$.

שאלה 5

באיזה נקודות הפונקציות הבאות גזירות?

$$f(x) = \begin{cases} 2x + \sin x & x \leq 5 \\ \cos x - 12 & x > 5 \end{cases} \quad \text{א.}$$

בנקודה $x = 5$ הפונקציה לא גזירה כי עבור $0 < \Delta x \approx 0$ נקבל כי $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(5 + \Delta x) - 12 - (10 + \sin 5)}{\Delta x}$ אינסופי לכן אין לו חלק סטנדרטי. (הסבר: המונה משמעותי לכן משמעותי חלקי אינפי' הוא אינסופי). בין -24 ל- -20 , כלומר משמעותי. המכנה אינפי', לכן משמעותי חלקי אינפי' הוא אינסופי). בכל נקודה אחרת הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. לכן לסיכום: f גזירה לכל $x \neq 5$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq -3 \\ x^3 + 37 & x > -3 \end{cases} \quad \text{ב.}$$

נבדוק גזירות בנקודה $x = -3$:

עבור $0 < \Delta x \approx 0$ נקבל:

$$\text{כלומר } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-3 + \Delta x)^3 + 37 - (3^2 + 1)}{\Delta x} = \frac{-27 + 27\Delta x - 9\Delta x^2 + \Delta x^3 + 37 - 10}{\Delta x} = 27 - 9\Delta x + \Delta x^2$$

$$\text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 27$$

עבור $0 > \Delta x \approx 0$ נקבל:

$$\text{כלומר } \text{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = -6 \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(-3 + \Delta x)^2 + 1 - (3^2 + 1)}{\Delta x} = \frac{9 - 6\Delta x + \Delta x^2 + 1 - 10}{\Delta x} = -6 + \Delta x$$

קיבלנו שתי תוצאות שונות עבור שני ערכי Δx שונים לכן הפונקציה לא גזירה בנקודה $x = -3$. מצד שני הפונקציה גזירה בכל נקודה אחרת לפי כללי הגזירה שלמדנו. לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x \neq -3$.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x < 0 \\ (x+1)^2 & x \geq 0 \end{cases} .ג.$$

לכל $x \neq 0$ הפונקציה גזירה לפי כללי הגזירה שלמדנו. נשאר לבדוק מה קורה בנקודה $x=0$:
 עבור $0 < \Delta x \approx 0$:

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2 \text{ כלומר } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x + 1)^2 - (0+1)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = 2 + \Delta x$$

ועבור $0 > \Delta x \approx 0$:

$$st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2 \text{ כלומר } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + 1 - (0+1)^2}{\Delta x} = \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

כלומר קיבלנו ש- $st\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = 2$ לכל $0 \neq \Delta x \approx 0$, לכן הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$ (ונגזרתה 2).

לסיכום הפונקציה גזירה לכל $x \in \mathbb{R}$.

שאלה 6

חשב את הגבולות הבאים בעזרת כללים (אריתמטיקה של גבולות, רציפות, כפל בצמוד

(וכו')

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2+x} \quad (1)$$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} \quad (2)$$

פתרון:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+9-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x)\ln(x+1)}{x^2-4} \quad (3)$$

פתרון:

הפונקציה רציפה בנקודה $x=1$ ולכן תגבול שלה שווה לערך שלה בנקודה, הציבו את הנקודה וקבלו את הגבול.