מבוא לתורת החבורות

רשימת משפטים וטענות

פברואר 2017

נכתב על ידי יהונתן רגב

1. תהי $(S,\cdot)$ חבורה למחצה. אם $e \in S$ יחידה משמאל ו - $e' \in S$ יחידה מימין, אז:

$$e \quad = \quad e'$$

2. תהי $(S,\cdot)$ חבורה למחצה. אם קיים ב – S איבר יחידה, אז הוא יחיד.

3. יהי $(M,\cdot,1)$ מונויד. אם $m \in M$ הפיך מימין ומשמאל, אז m הפיך.

4. יהי $(M,\cdot,1)$ מונויד. אם $m \in M$ הפיך משמאל, אז ניתן לצמצם את m משמאל.

5. יהי $(M,\cdot,1)$ מונויד. אם ב – M כל איבר הפיך משמאל, אז M הוא בעל צמצום משמאל.

6. יהי $(M,\cdot,1)$ מונויד. אם M סופי בעל צמצום משמאל, אז M חבורה.

7. יהי $(M,\cdot,1)$ מונויד. אם ב – M כל איבר הפיך מימין, אז כל איבר הפיך, כלומר, M חבורה.

8. יהי $(M,\cdot,1)$ מונויד. אם $m \in M$ הפיך, אז ההופכי של m יחיד.

9. יהי $(M,\cdot,1)$ מונויד. אם $m \in M$ הפיך, אז m^{-1} הפיך. אם $m,m' \in M$ הפיכים, אז mm' הפיך. כלומר, אוסף האיברים ההפיכים במונויד הוא חבורה.

10. לכל $a \in \mathbb{Z}$ ולכל $0 \neq b \in \mathbb{Z}$, קיימים $q,r \in \mathbb{Z}$ כך ש:

$$a \quad = \quad q \cdot b + r \quad , \quad 0 \leq r < |b|$$

11. לכל $a,b \in \mathbb{Z}$, לא שניהם 0, קיימים $\alpha,\beta \in \mathbb{Z}$, כך ש:

$$(a,b) \quad = \quad \alpha a + \beta b$$

12. יהיו $a,b,c \in \mathbb{Z}$ כך ש: $a \neq 0$. אם $a|bc$ ו - $(a,b) = 1$, אז:

$$a \quad | \quad c$$

13. מספר ראשוני הוא אי פריק.

14. מספר אי פריק הוא ראשוני.

15. **המשפט היסודי של האריתמטיקה.** כל מספר שלם שווה, עד כדי סדר וסימן, למכפלה של אי פריקים, באופן יחיד.

16. **למה של אוקלידס.** קיימים אינסוף מספרים ראשוניים.

17. יהי $n \in \mathbb{N}$. שקילות מודולו n זהו יחס שקילות, ומחלקות השקילות הן:

$$[0],[1],\cdots,[n-2],[n-1]$$

18. יהי $n \in \mathbb{N}$. לכל $a \in \mathbb{Z}$, $[a]$ הפיכה ב - $(\mathbb{Z}_n,\cdot,[1])$ אם ורק אם $(a,n) = 1$.

19. תהי G חבורה. $H \subseteq G$ תת-חבורה של G אם ורק אם H לא ריקה וסגורה לכפל ולהופכי.

20. תהי G חבורה. חיתוך של תת-חבורות של G הוא תת-חבורה של G.

21. תהי G חבורה. יהי $g \in G$ איבר. $g^m = e$ אם ורק אם $o(g)|m$.

22. משפט המיון לחבורות ציקליות. כל חבורה ציקלית איזומורפית לחבורה $\mathbb{Z}$ או לאחת החבורות $\mathbb{Z}_n$.

23. תהי G חבורה. יהי $g \in G$ איבר. מתקיים:

$$|\langle g\rangle| = o(g)$$

24. תהי G חבורה. יהי $g \in G$ איבר. לכל $m, m' \in \mathbb{Z}$, מתקיים:

$$\langle g^m, g^{m'}\rangle = \langle g^{(m,m')}\rangle$$

25. יהי $n \in \mathbb{N}$. כל תת-חבורה של $\mathbb{Z}_n$ ציקלית.

26. תהי G חבורה. יהי $g \in G$ איבר. לכל $m \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$o(g^m) = \frac{o(g)}{(o(g), m)}$$

27. יהי $n \in \mathbb{N}$. לכל $m \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$o(m) = \frac{n}{(n, m)}$$

28. יהי $n \in \mathbb{N}$. תת החבורות של $\mathbb{Z}_n$ הן החבורות $\langle d\rangle$ כאשר $d|n$, והסדר שלהן הוא n/d.

29. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. לכל $g \in G$, מתקיים:

$$|gH| = |H|$$

30. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. קוסטים של H ב $- G$ הם זרים או שווים.

31. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. יהיו $\{H_i\}_{i=1}^m$ הקוסטים השונים של H ב - G. מתקיים:

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} H_i$$

32. משפט לגרנז'. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. מתקיים:

$$|G| = |H| \cdot [G : H]$$

33. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. מתקיים:

$$|H| \mid |G|$$

34. תהי G חבורה. יהי $g \in G$ איבר. מתקיים:

$$o(g) \quad | \quad |G|$$

35. תהי G חבורה. יהי $g \in G$ איבר. מתקיים:

$$g^{|G|} \quad = \quad e$$

36. **משפט פרמה.** יהי p ראשוני. לכל $a \in \mathbb{Z}$ כך ש: $p \nmid a$, מתקיים:

$$a^{p-1} \quad \equiv \quad 1 \bmod p$$

37. **משפט אוילר.** יהי $n \in \mathbb{Z}$. לכל $a \in \mathbb{Z}$ כך ש: $(a, n) = 1$, מתקיים:

$$a^{\varphi(n)} \quad \equiv \quad 1 \bmod p$$

38. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. התכונות הבאות שקולות:

א. לכל $g \in G$, $gHg^{-1} = H$.

ב. לכל $g \in G$, $gHg^{-1} \subseteq H$.

ג. לכל $g \in G$, $gH = Hg$.

ד. כל קוסט שמאלי של H הוא קוסט ימני של H.

ה. כל קוסט ימני של H הוא קוסט שמאלי של H.

39. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. מתקיים:

$$[G : H]_r \quad = \quad [G : H]$$

40. תהי G חבורה אבלית. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. מתקיים:

$$H \quad \trianglelefteq \quad G$$

41. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. מכפלה של קוסטים ימניים של H היא קוסט ימני של H אם ורק אם H נורמלית. כלומר, מרחב המנה $G/_H$ הוא חבורה אם ורק אם H נורמלית.

42. תהי G חבורה. תהיינה $A, B \leq G$ תת-חבורות. $AB \leq G$ אם ורק אם $AB = BA$.

43. תהי G חבורה אבלית. תהיינה $A, B \leq G$ תת-חבורות. אזי, $AB \leq G$ תת-חבורה.

44. תהי G חבורה. תהיינה $H, N \leq G$ תת-חבורות כך ש: $N \trianglelefteq G$ נורמלית. אזי, $HN \leq G$ תת-חבורה.

45. תהי G חבורה. תהיינה $H, N \trianglelefteq G$ תת-חבורות נורמליות. אזי, $HN \trianglelefteq G$ נורמלית.

46. תהי G חבורה. חיתוך של תת-חבורות נורמליות של G הוא תת-חבורה נורמלית של G.

47. תהיינה G, H חבורות. יהי $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם. מתקיים:

$$\operatorname{im}\varphi \quad \leq \quad H$$

$$\ker\varphi \quad \leq \quad G$$

48. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. אזי, H היא תמונה של הומומורפיזם אל G.

49. תהי G חבורה. תהי $N \leq G$ תת-חבורה. אזי, $N \trianglelefteq G$ אם ורק אם N היא גרעין של הומומורפיזם מ - G.

50. **משפט האיזומורפיזם הראשון.** תהיינה G, H חבורות. יהי $\varphi: G \to H$ הומומורפיזם. מתקיים:

$$G/_{\ker\varphi} \quad \cong \quad \operatorname{im}\varphi$$

51. **משפט האיזומורפיזם השני.** תהי G חבורה. תהיינה $H, N \leq G$ תת-חבורות, כך ש: $N \trianglelefteq G$ נורמלית. מתקיים:

א. $N \trianglelefteq NH$.

ב. $N \cap H \trianglelefteq H$.

ג. $H/_{N \cap H} \cong NH/_N$.

52. **משפט האיזומורפיזם השלישי.** תהי A חבורה. תהיינה $B, C \trianglelefteq A$ תת-חבורות נורמליות כך ש: $C \subseteq B$. מתקיים:

א. $B/_C \trianglelefteq A/_C$.

ב. $\left. {A/_C} \middle/ {B/_C} \right. \cong A/_B$.

53. תהי G חבורה. אזי, אוסף תת-החבורות של G הוא סריג.

54. **משפט ההתאמה.** תהי G חבורה. תהי $N \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית. קיימת התאמה חד-חד-ערכית ועל בין אוסף תת-החבורות של G המכילות את N לבין סריג תת-החבורות של $G/_N$, השומרת על:

- הכלה.
- חיתוך.
- מכפלות.
- נורמליות.
- אינדקסים.

כלומר, תת-החבורות של המנה $G/_N$ הן החבורות מהצורה $H/_N$ כאשר $N \subseteq H$.

55. כל תמורה ניתן להציג באופן יחיד כמפלה של מחזורים זרים, עד כדי סדר.

56. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהי $\sigma \in S_n$ מחזור באורך ℓ. מתקיים:

$$o(\sigma) \quad = \quad \ell$$

57. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהיו $\sigma, \tau \in \mathrm{S}_n$ מחזורים זרים. מתקיים:

$$o(\sigma \circ \tau) \quad = \quad \operatorname{lcm}\big(o(\sigma), o(\tau)\big)$$

58. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהי $\sigma = (1 \ \cdots \ \ell) \in \mathrm{S}_n$. מתקיים:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \quad = \quad (-1)^{\ell-1}$$

59. יהי $n \in \mathbb{N}$. פונקציית הסימן $\operatorname{sgn}\colon \mathrm{S}_n \to \{\pm 1\}$ היא הומומורפיזם.

60. יהי $n \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$|\mathrm{A}_n| \quad = \quad \frac{n!}{2}$$

61. יהי $n \in \mathbb{N}$. תמורות ב - S_n הן צמודות אם ורק אם יש להן אותו מבנה מחזורים.

62. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהי $\sigma \in \mathrm{S}_n$ מחזור באורך ℓ. מתקיים:

$$\operatorname{sgn}(\sigma) \quad = \quad (-1)^{\ell-1}$$

63. יהי p ראשוני. תהי G חבורה מסדר p. מתקיים:

$$G \quad \cong \quad \mathbb{Z}_p$$

64. תהי G חבורה בעלת m יוצרים. אזי, קיים אפימורפיזם $\varphi\colon \mathbb{F}_m \to G$, כך ש:

$$G \quad \cong \quad {}^{\mathbb{F}_m}\!/_{\ker\varphi}$$

65. יהי $\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle$ ייצוג של חבורה על-ידי יוצרים ויחסים. מתקיים:

$$\langle \mathcal{X} | \mathcal{R} \rangle \quad \cong \quad {}^{\mathbb{F}_{\mathcal{X}}}\!/_{\langle\langle \mathcal{R} \rangle\rangle}$$

66. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהי $\mathbb{F}$ שדה. אזי, קיים שיכון:

$$\mathrm{S}_n \quad \hookrightarrow \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$$

67. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהי $\mathbb{F}$ שדה. תת-חבורת בורל $\mathrm{B}_n(\mathbb{F}) \leq \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ היא תת-החבורה השומרת על הדגל הסטנדרטי.

68. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהי $\mathbb{F}$ שדה. מתקיים:

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})\big/\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}) \quad \cong \quad \mathbb{F}^{\times}$$

69. יהי $n \in \mathbb{N}$. יהי $\mathbb{F}$ שדה. תת-חבורה של $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ צמודה לתת-חבורת בורל $\mathrm{B}_n(\mathbb{F})$ אם ורק אם היא שומרת דגל.

70. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. אזי, לכל $x \in X$, מתקיים:

$$|G \cdot x| \quad = \quad [G : G_x]$$

71. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. אזי, לכל $x \in X$, מתקיים:

$$|G \cdot x| \quad \mid \quad |G|$$

72. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. תהי φ פעולת G על X. אזי, $G\big/\ker\varphi$ פועלת על X, והפעולה נאמנה.

73. **משפט קיילי.** כל חבורה סופית איזומורפית לתת-חבורה של אחת מהחבורות S_n.

74. תהי G חבורה. אזי, לכל $x \in G$, מתקיים:

$$|[x]| \quad = \quad [G : \mathrm{C}_G(x)]$$

75. תהי G חבורה. אזי, לכל $x \in G$, מתקיים:

$$|[x]| \quad \mid \quad |G|$$

76. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. אזי, מספר תת-החבורות של G הצמודות ל $-H$ הוא $[G : N_G(H)]$.

77. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. אזי, מספר תת-החבורות של G הצמודות ל $-H$ מחלק את $|G|$.

78. יהי $n \in \mathbb{N}$. החבורה הסימטרית S_n נוצרת על-ידי המחזורים.

79. יהי $n \in \mathbb{N}$. החבורה הסימטרית S_n נוצרת על-ידי החילופים.

80. יהי $3 \leq n \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$\mathrm{Z}(\mathrm{S}_n) \quad = \quad \{\mathrm{id}\}$$

81. תהי G חבורה. תהי $H \trianglelefteq G$ תת-חבורה נורמלית של G. אזי, H היא איחוד של מחלקות צמידות של G.

82. יהי $n \in \mathbb{N}$. תהי $\sigma \in \mathrm{S}_n$. מחלקת הצמידות של σ ב - S_n מתפצלת לשתי מחלקות צמידות ב - A_n אם ורק אם $\mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(\sigma) \subseteq \mathrm{A}_n$, ונשארת מחלקת צמידות אחת ב - A_n אם ורק אם $\mathrm{C}_{\mathrm{S}_n}(\sigma) \nsubseteq \mathrm{A}_n$.

83. החבורה A_5 פשוטה.

84. יהי $n \in \mathbb{N}$. A_n נוצרת על-ידי התמורות בעלות מבנה מחזורים: $(**)(**)$, $(***)$.

85. יהי $n \in \mathbb{N}$. A_n נוצרת על-ידי התמורות בעלות מבנה המחזורים $(***)$.

86. יהי $n \in \mathbb{N}$. A_n נוצרת על-ידי התמורות בעלות מבנה המחזורים $(**)(**)$.

87. יהי $5 \leq n \in \mathbb{N}$. החבורה A_n פשוטה.

88. הלמה של ברנסייד. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. מתקיים:

$$\left|{}^{X}\!/_{G}\right| = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{g \in G} \mathrm{fp}(g)$$

89. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. אזי, קיים שיכון:

$${}^{G}\!/_{\mathrm{Core}(H)} \hookrightarrow \mathrm{S}_{G/H}$$

90. תהי G חבורה פשוטה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה כך ש: $[G : H] = m$. אזי, קיים שיכון:

$$G \hookrightarrow \mathrm{S}_m$$

91. יהי $n \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong \mathrm{U}_n$$

92. יהי p ראשוני. יהי $n \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$$

93. יהי $2,6 \neq n \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$\mathrm{Aut}(\mathrm{S}_n) \cong \mathrm{S}_n$$

94. תהי G חבורה. מתקיים:

$${}^{G}\!/_{\mathrm{Z}(G)} \cong \mathrm{Inn}(G) \trianglelefteq \mathrm{Aut}(G)$$

95. משפט N/C. תהי G חבורה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. קיים שיכון:

$$N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(H)$$

96. משוואת המחלקות. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X. מתקיים:

$$X = \{x \in X \mid |G \cdot x| = 1\} + \bigcup_x G \cdot x$$

כאשר האיחוד הוא על נציגים של המסלולים מאורך גדול מ - 1.

97. תהי G חבורה. מתקיים:

$$|G| = |Z(G)| + \sum_x [G : C_G(x)]$$

כאשר הסכום הוא על נציגים של המסלולים שאינם במרכז.

98. משפט קושי. תהי G חבורה. יהי p ראשוני המחלק את סדר החבורה. אזי, קיים ב $- G$ איבר מסדר p.

99. תהי G חבורה סופית. יהי p ראשוני. אזי, G חבורת p אם ורק אם הסדר של G הוא חזקה של p.

100. תהי G חבורת p סופית. מתקיים:

$$Z(G) \neq \{e\}$$

101. תהי G חבורה מסדר p. אזי, G ציקלית.

102. תהי G חבורה. אם $G/Z(G)$ ציקלית, אז G אבלית.

103. תהי G חבורה מסדר p^2. אזי, G אבלית.

104. תהי G חבורת p. תהי $H \lneqq G$ תת-חבורה אמיתית. מתקיים:

$$H \lneqq N_G(H)$$

105. משפט סילו הראשון. תהי G חבורה. יהי p ראשוני המחלק את סדר החבורה. אזי, ל $- G$ יש תת-חבורת p-סילו.

106. תהי G חבורה. תהי $P \trianglelefteq G$ תת-חבורת p-סילו נורמלית. תהי $N \leq G$ תת-חבורת p. מתקיים:

$$N \subseteq P$$

107. תהי G חבורה. תת-חבורה p-סילו נורמלית היא יחידה.

108. תהי G חבורה. תהי $P \leq G$ תת-חבורת p-סילו. תהי $N \leq G$ תת-חבורת p. אם $N \subseteq N_G(H)$, אז:

$$N \quad \subseteq \quad P$$

109. משפט סילו השני. תהי G חבורה. אזי, כל תת-חבורות p-סילו של G צמודות זו לזו.

110. משפט סילו השלישי. תהי G חבורה. אזי, מספר תת-חבורות p-סילו של G שקול ל 1 מודולו p.

111. תהי G חבורה. אזי, כל תת-חבורת p של G מוכלת בתת-חבורת p-סילו.

112. תהי G חבורה. אזי, $n_p = 1$ אם ורק אם תת-חבורת p-סילו של G יחידה.

113. תהי G חבורה. אזי, תת-חבורת p-סילו של G יחידה אם ורק אם היא נורמלית.

114. תהי G חבורה. תהי P תת-חבורת p-סילו של G. מתקיים:

$$N_G\big(N_G(P)\big) \quad = \quad N_G(P)$$

115. תהי G חבורה. תהי P תת-חבורת p-סילו של G. תהי $H \leq G$ תת-חבורה, כך ש: $N_G(P) \subseteq H$. מתקיים:

$$N_G(H) \quad = \quad H$$

116. תהיינה A, B חבורות. תהי $G \cong A \times B$ מכפלה ישרה חיצונית של A, B. אזי, G היא מכפלה ישרה פנימית של A, B.

117. תהי G חבורה. תהיינה $A, B \leq G$ תת-חבורות. אם G היא מכפלה ישרה פנימית של A, B, אז:

$$G \quad \cong \quad A \times B$$

118. תהי G חבורה סופית. אזי, G איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות p (עבור p–ים שונים) אם ורק אם כל תת-חבורות p–סילו של G נורמליות.

119. תהי G חבורה. תהי $1 = G_n \lhd G_{n-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0 = G$ סדרה תת-נורמלית של G. יהי $1 \leq i \leq n$. אזי, ניתן לעדן את הסדרה בנקודה i אם ורק אם המנה ${G_{i-1}}/{G_i}$ אינה פשוטה.

120. תהי G חבורה סופית. אזי, קיימת ל G סדרת הרכב.

121. משפט ז'ורדן הולדר. תהי G חבורה סופית. אזי, גורמי ההרכב של G יחידים עד כדי סדר.

122. תהי G חבורה. תהי $G_k \lhd G_{k-1} \lhd \cdots \lhd G_1 \lhd G_0$ חלק מסדרת הרכב, המתקבלת מעידון חלק מהסדרה התת-נורמלית $G_k \lhd G_0$. אזי:

$$1 \lhd {G_{k-1}}/{G_k} \lhd {G_{k-2}}/{G_k} \lhd \cdots \lhd {G_1}/{G_k} \lhd {G_0}/{G_k}$$

היא סדרת הרכב עם אותן המנות.

123. תהי G חבורה. תהי $N \lhd G$ תת-חבורה נורמלית. אזי, G פתירה אם ורק אם $N, {G}/{N}$ פתירות.

124. תהי G חבורה. יהי $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. מתקיים:

$$G^{(n)} \quad \lhd \quad G$$

125. תהי G חבורה. אזי, החבורה ${G}/{G'}$ אבלית.

126. תהי G חבורה. תהי $K \lhd G$ תת-חבורה נורמלית כך שהמנה ${G}/{K}$ אבלית. אזי:

$$G' \quad \subseteq \quad K$$

127. תהי G חבורה. אזי, הסדרה הנגזרת של G היא סדרה נורמלית עם מנות אבליות.

128. תהי G חבורה אבלית פשוטה. אזי, G ציקלית מסדר ראשוני.

129. תהי G חבורה סופית. התכונות הבאות שקולות:

א. G פתירה.

ב. קיימת ל $- G$ סדרת הרכב עם מנות אבליות.

ג. קיימת ל $- G$ סדרה תת-נורמלית עם מנות אבליות.

ד. קיימת ל $- G$ סדרה תת-נורמלית עם מנות ציקליות.

ה. קיימת ל $- G$ סדרה תת-נורמלית עם מנות ציקליות מסדר ראשוני.

ו. קיימת ל $- G$ סדרה נורמלית עם מנות אבליות.

130. תהי G חבורה. אזי, G פתירה אם ורק אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש:

$$G^{(n)} \quad = \quad 1$$

131. תהי G חבורה פתירה. תהי $H \leq G$ תת-חבורה. אזי, H פתירה.

132. תהי G חבורה. תהיינה $A, B \lhd G$ תת-חבורות נורמליות כך ש: $A \lhd G$. אזי:

$$ {B}/{A} \subseteq Z\left({G}/{A}\right) \quad \Leftrightarrow \quad [G, B] \subseteq A$$

133. תהי G חבורה נילפוטנטית. אזי, G פתירה.

134. תהי G חבורה. אזי, הסדרה המרכזית היורדת של G היא סדרה מרכזית.

135. תהי G חבורה. תהי $\{G_n\}$ סדרה מרכזית של G. אזי, לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$G_{(n)} \quad \subseteq \quad G_n$$

136. תהי G חבורה. אזי, G נילפוטנטית אם ורק אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש: $G_{(n)} = 1$.

137. תהי G חבורה. אזי, הסדרה המרכזית העלה של G היא סדרה מרכזית.

138. תהי G חבורה. תהי $\{G_n\}$ סדרה מרכזית של G. אזי, לכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים:

$$G_n \quad \subseteq \quad \zeta_n G$$

139. תהי G חבורה. אזי, G נילפוטנטית אם ורק אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש: $\zeta_n G = G$.

140. תהי G חבורה סופית. התכונות הבאות שקולות:

א. G נילפוטנטית.

ב. לכל תת-חבורה אמיתית $H \lneqq G$, מתקיים: $H \lneqq N_G(H)$.

ג. כל תת-חבורה מקסימלית של G נורמלית.

ד. כל תת-חבורת p-סילו של G נורמלית.

ה. G איזומורפית למכפלה ישרה של חבורות p.

141. יהיו $n, m \in \mathbb{N}$. מתקיים:

$$\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm} \quad \Leftrightarrow \quad (n, m) = 1$$

142. חבורה אבלית נוצרת סופית חסרת פיתול איזומורפית לחבורה מהצורה - $\mathbb{Z}^n$.

143. חבורה אבלית נוצרת סופית מפותלת היא סופית.

144. חבורה אבלית נוצרת סופית איזומורפית למכפלה של חבורה מהצורה $\mathbb{Z}^n$ עם חבורה סופית.

145. חבורה אבלית סופית היא מכפלה ישרה של חבורות p אבליות.

146. חבורת p אבלית היא מכפלה ישרה של חבורות ציקליות.

147. חבורה אבלית נוצרת סופית היא מכפלה ישרה של חבורות ציקליות.

148. **משפט המיון לחבורות אבליות נוצרות סופית.** לכל חבורה אבלית נוצרת סופית יש צורה קנונית יחידה.

■