בס"ד A

אלגברה לינארית 1 – קיץ תשע"ב
-מועד א'

משך הבחינה : שעתיים וחצי. ניתן להכניס מחשבון מדעי פשוט בלבד.
בהצלחה!

<u>חלק א':</u>

פתרו 2 מתוך 3 השאלות הבאות :
שימו לב: לשאלות 1, 2 שווה 25 נקודות בלבד ואילו שאלה 3 היא 30 נקודות!

1. א. נסח והוכח את משפט הדרגה של העתקה לינארית.
ב. יהי W,V מ"ו ממימד n ו m בהתאמה כך ש $n > m$ ותהי $T : V \to W$ הע"ל.
הוכח או הפרך: ייתכן כי T חד-חד ערכית.

2. א. נסח והוכח את למת ההחלפה של שטייניץ.
ב. תהי $B = \{1 + x + x^2 + x^3, 3 + 4x + 5x^3\} \subseteq R_3[x]$.
הוכח כי B בת"ל והשלימה לבסיס עבור $R_3[x]$.

3. א. תהי $A \in M_{m\times n}(F)$ ו $B \in M_{n\times k}(F)$. הוכח כי $AB = 0$ אם ורק אם $C(B) \subseteq Null(A)$. (רמז : כפל עמודה !!!)
ב. תהיינה $A, B \in M_{3\times 3}(F)$ כך ש $rank(A) = rank(B) = 2$. הוכח לפי א' כי $AB \neq 0$.
ג. תהי $A \in M_{n\times n}(F)$ המקיימת $A^2 = 0$. הוכח כי $rank(A) \leq \frac{n}{2}$.
(רמז: השתמשו במשפט על $rank(A) + \dim(Null(A))$)

<u>חלק ב':</u>

פתרו את השאלות הבאות:

1. תהי מטריצה ריבועית A סמן את התשובה **השגויה**:
א. אם למערכת $Ax = b$ יש פתרון אזי $b \in C(A)$
ב. אם $b \in C(A)$ אזי למערכת $Ax = b$ יש פתרון
ג. אם $Ax = 0$ אזי $x \notin R(A)$
ד. אם $N(A) = C(A)$ אזי $|-A| = |A|$

2. נתונה מערכת משוואות מעל השדה $\mathbb{Z}_5$.
$$x + y + az = 2$$
$$-ax - 2y + z = 0$$
$$x + y + 2z = a$$
עבור אילו ערכי a למערכת יש 5 פתרונות?
א. $a = 0$.
ב. $a = 1$
ג. $a = 2$
ד. אין ערך a עבורו למערכת יש 5 פתרונות.

3. תהי
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

איזה מהטענות הבאות נכונה?

א. $A^2 = 0$.

ב. $A^2 \neq 0$ ו $A^3 = 0$.

ג. $A^3 \neq 0$ ו $A^4 = 0$.

ד. טענות א,ב,ג לא נכונות.

4. יהי V מרחב וקטורי ממימד 5 ותהי $A \subseteq V$ קבוצה פורשת.

איזה מהטענות הבאות נכונה בוודאות?

א) אם נוסיף ל A איבר, היא כבר לא תהיה פורשת.

ב) אם נוריד מ A איבר, היא כבר לא תהיה פורשת.

ג) אם נוסיף ל A איבר היא תהיה תלויה לינארית.

ד) A קבוצה תלויה לינארית.

5. יהי n מספר טבעי. יהי V מרחב וקטורי ממימד $10n$. יהיו W_1, W_2, W_3 תתי מרחבים כך ש:
$dimW_1 = dimW_2 = dimW_3 = n$ ובנוסף ידוע כי $\dim(W_1 \cap W_3) = 1$..

מהן האפשרויות עבור $\dim(W_1 + W_2 + W_3)$?

א) כל מספר בתחום $\{2n-1, 2n, \dots, 10n\}$.

ב) כל מספר בתחום $\{2n-1, 2n, \dots, 3n\}$.

ג) כל מספר בתחום $\{2n-1, 2n, \dots, 3n-1\}$.

ד) תשובות א,ב,ג אינן נכונות.

6. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}$ ויהי S הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$. כמה בסיסים C קיימים כך ש $[I]_C^S = A$?

א) אף לא אחד.

ב) אחד.

ג) אינסוף.

ד) תשובות א,ב,ג אינן נכונות.

7. יהי V מרחב וקטורי ממימד 4 ו W מרחב וקטורי ממימד 2 תהי $T: V \longrightarrow W$ העתקה לינארית שאינה העתקת האפס. מהן האפשרויות עבור $\dim(Ker(T))$?

א. $\dim(Ker(T)) = 2$.

ב. כל מספר בתחום $\{2,3\}$.

ג. כל מספר בתחום $\{1,2,3\}$.

ד. כל מספר בתחום $\{2,3,4\}$.

8. יהיו $V = \mathbb{Z}_p^3$ ו $W = \mathbb{Z}_p^5$ שני מרחבים וקטוריים מעל $\mathbb{Z}_p$. כמה העתקות לינארית $T: V \longrightarrow W$ מקיימות ש

$T(1,0,0) = (1,0,3,0,5)$ $T(0,2,3) = (1,1,-2,4,1)$ $T(0,3,2) = (0,1,0,3,0)$

א) אם $p = 2$ אין כאלה העתקות. אחרת יש בדיוק אחת.

ב) אם $p = 3$ יש אינסוף העתקות כאלה. אחרת יש בדיוק אחת.

ג) אם $p = 5$ אין כאלה העתקות. אחרת יש בדיוק אחת.

ד) אף אחת מהתשובת א,ב,ג לא נכונה.

9. יהי $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ בסיס עבור המרחב הוקטורי V. תהי $\sigma \in S_n$ תמורה. נגדיר בסיס חדש $B' = \{v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}\}$ שמכיל את אותם איברי B אבל בסדר אחר.

מהי הדטרמיננטה של המטריצה $[I]_B^{B'}$?

א. $\left|[I]_B^{B'}\right| = sgn(\sigma)$.

ב. $\left|[I]_B^{B'}\right| = -sgn(\sigma)$.

ג. $\left|[I]_B^{B'}\right| = 0$.

ד. אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.

10. תהי $A \in \mathbb{F}^{5\times 5}$ מטריצה מדרגה 3. למה שווה $A \cdot Adj(A)$?

א) I

ב) מטריצת ה- 0

ג) אין מספיק נתונים כדי לדעת בוודאות.

ד) במקרה הזה, לא קיימת בכלל המטריצה $Adj(A)$.