תירגול 8

2 בדצמבר 2013

4 המרחביים היסודיים של מטריצה

תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אזי 4 המרחבים היסודיים של A הם:

1. מרחב העמודות $C(A) := \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\} = span\{C_1(A), \dots, C_n(A)\} \subset \mathbb{F}^m$
2. מרחב השורות $C(A^t) = R(A) := \{A^t x \mid x \in \mathbb{F}^m\} = span\{R_1(A), \dots, R_n(A)\} \subset \mathbb{F}^n$
3. מרחב האפס $N(A) := \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{F}^n$
4. מרחב האפס השמאלי $N(A^t) := \{x \in \mathbb{F}^m \mid A^t x = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^m \mid x^t A = 0\} \subset \mathbb{F}^m$.

למשל $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אזי

1. $C(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
2. $R(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
3. $N(A) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\}$
4. $N(A^t) = \{0\}$

מרחב השורות

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m\times m}$ מטריצה הפיכה (למשל מכפלת מטריצות אלמנטריות שמדרגות את A) .

נסמן $EA = U \in \mathbb{F}^{m\times n}$.

הוכח $R(A) = R(U)$.

הוכחה:

$(\supseteq)$ יהא $U^t x \in R(U)$ אזי $U^t x = A^t E^t x = A^t(E^t x) = A^t y \in R(A)$.

$(\subseteq)$יהא $A^t x \in R(A)$ אזי
$A^t x = (E^{-1}U)^t x = (U^t(E^{-1})^t)x = U^t[(E^t)^{-1}x] = U^t y \in R(U)$. $\blacksquare$

מסקנה: בפרט אם E מכפלה של מטריצות אלמנטריות המעבירות את A לצורה מדורגת/קנונית.

תרגיל/דוגמא: תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ מצא את $R(A)$.

פתרון: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

כיוון שמרחב השורות של A שווה למרחב השורות לאחר דירוג נקבל ש

$$R(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\} = \{\begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a \\ 4a+b \end{pmatrix}\}$$

מרחב העמודות

את מרחב העמודות ניתן למצוא כמו את מרחב השורות ע"י מעבר ל A^t. נראה ע"י דוגמא עוד דרך:

דוגמא: מצא את מרחב העמודות של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ וניתן להוכיח כי מרחב העמודות נפרש ע"י העמודות במטריצה המקורית שמתאימות לעמודות ציר.

כלומר $span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$

$(\neq span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\})$

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ונניח שאחר דירוג העמודות $1, \cdots, l$ הן עמודות עם ציר. הוכח $\{C_1(A), \cdots C_l(A)\}$בסיס למרחב העמודות.

פתרון: נסמן $EA = U$. כאשר U הצורה המדורגת של A ו $A = E^{'}U$ כאשר $E^{-1} = E^{'}$

בת"ל: נניח $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(A) = 0$ אבל $C_i(A) = E^{'}C_i(U)$ ולכן

$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i E^{'} C_i(U) = 0$ ע"י הכפלה בהופכית של $E^{'}$ נקבל $\sum_{i=1}^{l} \alpha_i C_i(U) = 0$

ולכן $\alpha_i = 0$ לכל i כי עמודות עם ציר הן בת"ל.

פורשת: מ"ל שלכל $l < s \leq n$

מתקיים $C_s(A) \in span\{C_1(A), \cdots C_l(A)\}$. (לפי תרגיל מש.ב.)

ברור כי $C_s(U) \in span\{C_1(U), \cdots C_l(U)\}$

כי $\{C_1(U), \cdots C_l(U)\}$ העמודות עם ציר.

בנוסף $C_i(U)=EC_i(A)$ ולכן אם $C_s(U)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_iC_i(U)$ אזי $EC_s(A)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_iEC_i(A)$

ולכן ע"י הכפלה בהופכית נקבל $C_s(A)=\sum_{i=1}^{l}\alpha_iC_i(A)$.■

הערות:

1. התרגיל נכון גם אם עמודות הצירים הן אינן העמודות הראשונות דווקא.
2. מרחב העמודות של U אינו שווה למרחב העמודות של A.

משפט: $dim[R(A)]=dim[C(A)]$.

הגדרה: הדרגה של Aמוגדרת להיות $rank(A)=dim[R(A)]$

הערה $rank(A)=dim[R(A)]=dim[C(A)]$= מספר השורות השונות מאפס לאחר דירוג= מספר עמודות הציר = מספר משתנים תלויים.

תרגיל: יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times p}$ מטריצות הוכח: $rank(AB)\leq rank(A),rank(B)$

הוכחה: ש"ל $dim[C(AB)]\leq dim[C(A)]$ נסמן $\{a_1,\ldots,a_l\}$בסיס למרחב העמודות.

בנוסף $C(AB)=span\{AC_1(B),\ldots,AC_p(B)\}$ כיוון שלכל i $AC_i(B)$ הוא צ"ל של עמודות Aמקבלים ש

$C(AB)=span\{AC_1(B),\ldots,AC_p(B)\}\subset span\{a_1,\ldots,a_l\}=C(A)$ ולכן $dim[C(AB)]\leq dim[C(A)]$.

באופן דומה $dim[R(AB)]\leq dim[R(A)]$.

מסקנה: יהיו $A\in\mathbb{F}^{m\times n},B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ ו - B הפיכה אזי $rank(AB)=rank(A)$

הוכחה: $rank(A)=rank(ABB^{-1})\leq rank(AB)\leq rank(A)$

מרחב האפס

תרגיל: תהא $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ ותהא $E\in\mathbb{F}^{m\times m}$ מטריצה הפיכה. נסמן $EA=U\in\mathbb{F}^{m\times n}$.

הוכח $N(A)=N(U)$.

פתרון: $(\supseteq)$ יהא $x\in N(U)$ אזי $Ux=0$לפי הגדרה ולכן $Ax=E^{-1}Ux=E^{-1}0=0$ ולכן $x\in N(A)$

$(\subseteq)$יהא $x\in N(A)$ אזי $Ax=0$ולכן $Ux=EAx=E0=0$ ולכן $x\in N(U)$. ■

תרגיל: מצא את מרחב האפס של $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$.

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ ולכן מרחב האפס הוא $(z=t,w=s)$

$$span\{\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\}=s\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2s-3t\\-s\\t\\s\end{pmatrix}.$$

מרחב האפס השמאלי

תרגיל: מצא מצא את מרחב האפס השמאלי של $A=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$.

פתרון: צ"ל $N(A^t)$. נדרג את A^t

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור $z = t$ נקבל $N(A^t) = \{ \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \} = span\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$.

סיכום (אלגוריתם למציאת 4 המרחבים)

בהנתן מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ נדרג את המטריצה ואז:

1. שורות השונות מאפס מהוות בסיס למרחב השורות.
2. עמודות המטריצה המקורית המתאימות לעמודות ציר מהוות בסיס למרחב העמודה.
3. ע"י הצבת פרמטרים במשתנים החופשיים נמצא את הפתרון הכללי. ממנו נסיק את הבסיס למרחב האפס.
4. במרחב האפס השמאלי נטפל בנפרד ע"י שחלוף A וחזרה לסעיף 3.

משפט: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. נסמן $rank(A) = dim(C(A)) = dim(R(A)) = r$ אזי
$dim(N(A)) + dim(C(A)) = n$ ו־ $dim(N(A^t)) + dim(R(A)) = m$
במילים אחרות $dim(N(A)) = n - r$ ו־ $dim(N(A^t)) = m - r$.
במקרה הפרטי ש $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ נקבל תוצאה יותר חזקה:
לדוגמא עבור $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. מצאנו כי

$$B_R = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B_C = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

$$B_N = \{\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, B_{N(A^t)} = \{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

לפי המשפט $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^4$

ו $\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$

דוגמא לסעיף 3: כעת יהיה $v \in \mathbb{R}^4$ אזי קיימים סקלארים כך ש

$$v = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

וההצגה היא יחידה (כי המשפט אומר ש $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^4$).
נגדיר: $v_R = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_N = \alpha_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
ואז $v = v_R + v_N$ באופן יחיד.

משפט (בש.ב) : תהא $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ויהיו $B_R, B_C, B_N, B_{N(A^t)}$ בסיסים למרחב העמודות,שורות, האפס, האפס השמאלי בהתאמה.
אזי $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^n$ ו ־ $B_C \cup B_{N(A^t)}$ בסיס ל $\mathbb{R}^m$.
בפרט: נסמן $dim(C(A)) = dim(R(A)) = r$

1. $dim(N(A)) = n - r$, $dim(N(A^t)) = m - r$ (כמו במשפט הכללי)
2. $B_R \cup B_N$ קבוצה בת"ל, $B_C \cup B_{N(A^t)}$ קבוצה בת"ל
3. כל $v \in \mathbb{R}^m$ ניתן להצגה יחידה כ־ $v = v_N + v_R$ כאשר $v_N \in N(A), v_R \in R(A)$
וכל $v \in \mathbb{R}^n$ ניתן להצגה יחידה כ־ $v = v_{N(A)} + v_C$ כאשר $v_{N(A^t)} \in N(A^t), v_C \in C(A)$

הוכחה:

1. הוכח שאם $x \in R(A) \cap N(A)$ אז $x = 0$. (הדרכה אם $Ax = 0, A^t y = x$ חשוב מה מתקבל בכפל x^t)
2. נסמן $B_R = \{v_1, \dots v_r\},\ B_N = \{w_1 \dots w_k\}$ הוכח ש $B_R \cup B_N$ בת"ל (הדרכה: התבונן בצ"ל ששווה ל־0 והיעזר בסעיף הקודם להראות שזהו הצ"ל הטרוויאלי)
3. בסימונים לעיל $r + k = n$ לפי המשפט הכלל כי גם מתקיים $r = dim(C(A))$
4. לפי משפט השלישי חינם הסק כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל $\mathbb{R}^n$

תרגיל. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $rank(A) + rank(B) > n$. הוכח $AB \neq 0$

הוכחה: נניח בשלילה כי $AB = 0$ כלומר לכל i $AC_i(B) = 0$

$\Leftarrow$ $C(B) \subset N(A)$. $\Leftarrow$ $rank(B) = dim(C(B)) \leq dim(N(A))$.

$\Leftarrow$ $rank(B) + rank(A) \leq dim(N(A)) + rank(A) = n$ סתירה לנתון. ■

הוכח/הפרך: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $0 \neq \alpha \in \mathbb{F}$ אזי 4 המרחבים היסודיים של $A, \alpha A$ שווים.

הוכחה (עבור האפס השמאלי והשאר דומה): צ"ל $N(A^t) = N(\alpha A^t)$.

($\supseteq$) יהא $x \in N(\alpha A^t)$. $\Leftarrow$ $\alpha A^t x = 0$ נכפול ב α^{-1} ונקבל $A^t x = 0$ $\Leftarrow$ $x \in N(A^t)$.

($\subseteq$)יהא $x \in N(A^t)$ $\Leftarrow$ $A^t x = 0$ $\Leftarrow$ $\alpha A^t x = 0$ $\Leftarrow$ $x \in N(\alpha A^t)$ ■.

הוכח הפרך: תהא $B, A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ כך ש־4 המרחבים היסודיים שווים אזי $B = \alpha A$.

הפרכה: ניקח $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

אזי קל לראות ש $C(A) = C(B) = R(A) = R(B) = \mathbb{R}^2$.

בנוסף לפי המשפט על המימדים נקבל ששאר המרחבים שווים ל $\{0\}$.

לכן 4 המרחבים היסודיים שווים אבל Bאינה כפולה של A. ■