ב"ש אנליזה 1 תשעח מועד ב

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(e^{\left(x^2\right)}-1\right)\sin(2x)}{(1-\cos(x))\ln(1+2x)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\left(x^2\right)}-1\right)\sin(2x)}{(1-\cos(x))\ln(1+2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\left(x^2\right)}-1\right)}{x^2}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}\cdot\frac{x^2\cdot 2x}{x^2\cdot 2x}$$
$$=1\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1=2$$

(ב) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

פתרון:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{1+0}}{1+0}=-1$$

(ג) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$

פתרון: נשתמש בכלל המנה, נגדיר $a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ ואז

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=a_{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\cdot\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}=\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}\cdot\frac{(n+1)^2}{1}\to\frac{1}{4}$$

בגלל ש

$$\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{n^2\left(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}=\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}\to\frac{1+0+0}{4+0+0}$$

וכיוון ש $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$ גם $\sqrt[n]{a_n}\to L$ שזה מה שרצינו לחשב בתרגיל.

2. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$ וכן נתון $a_1>0$.

(א) מצאו לאילו ערכי a_1 הסדרה עולה, הוכיחו.

פתרון: טענה: הסדרה עולה לכל $a_1\le 1$. נוכיח באינדוקציה כי $a_n\le 1$ במקרה זה ואז $a_{n+1}-a_n=\sqrt{a_n}-a_n\ge 0$ מכיוון שעבור $0<a_n\le 1$ מתקיים $\sqrt{a_n}>a_n$:

- בסיס $n=1$: נתון ש $a_1\le 1$.

- צעד - נניח נכונות עבור n, כלומר $a_n \leq 1$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר $a_{n+1} \leq 1$. לפי הגדרה:

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} \leq \sqrt{1} = 1$$

כי $\sqrt{x}$ פונקציה עולה בחיוביים.

(ב) נניח $a_1 = \frac{1}{2}$, הוכיחו כי הסדרה חסומה וחשבו את גבול הסדרה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: הוכחנו שהסדרה יורדת, קל לראות שהסדרה חיובית ולכן חסומה מלמטה ע"י 0 (הוכחה: $a_1 = 0.5$ חיובי ואם a_n חיובי אז גם $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$ חיובי) . סדרה יורדת וחסומה מלטה מתכנסת לגבול סופי שנסמנו L, כלומר $a_n \to L$ ולכן גם $a_{n+1} \to L$. מהגדרת הסדרה נקבל

$$L \leftarrow a_{n+1} = \sqrt{a_n} \to \sqrt{L}$$

ולכן $L = \sqrt{L}$. כיוון ש a_n חיובי הגבול גדול שווה לאפס ונוכל לעלות את המשוואה באופן שקול לקבל $L^2 = L$. נעביר אגף ונוציא גורם משותף $L(L-1) = 0$ והפתרונות למשוואה זו הם $0, 1$. כיוון ש $a_1 = 0.5$ והסדרה יורדת הגבול $L \leq 0.5$ ולכן האפשרות $L = 1$ נפסלת ונשארנו עם אפשרויות יחידה שהיא $L = 0$ וזה גבול הסדרה.

3. נביט בפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x) & x \geq 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

(א) הוכיחו כי f גזירה ב $x = 0$.

פתרון: לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$$

וערך זה שווה ל $f'(0)$. נחשב:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x - 0}{x} = 1$$

ומצד שני

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x) - 0}{x} = 1$$

ולכן שני הגבולות שווים ולכן f גזירה ב $x = 0$ ומתקיים $f'(0) = 1$.

(ב) האם $f'(x)$ רציפה ב $x = 0$?

פתרון: ביחד עם סעיף קודם נקבל ש

$$f'(x) = \begin{cases} \cos(x) & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

כעת, לפי הגדרה, על מנת ש f' תהיה רציפה ב $x = 0$ צריך להתקיים

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = f'(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x)$$

כלומר

$$\lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1 = \lim_{x\to 0^-} 1$$

וזה אכן מתקיים ולכן f' רציפה ב $x=0$.

(ג) האם $f'(x)$ גזירה ב $x=0$?

פתרון: לפי הגדרה, צריך לחשב את הגבול

$$f''(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$$

שזה שקול לכך ש

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x}$$

וערך זה שווה ל $f''(0)$. נחשב:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-1}{x} = 0$$

ומצד שני

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \cdot \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

ולכן שני הגבולות שווים ולכן f' גזירה ב $x=0$ ומתקיים $f''(0)=0$.

.4

(א) מצאו את המינימום של הפונקציה $f(x) = x \cdot e^x$.

פתרון: נגזור

$$f'(x) \quad = \quad e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

ולכן f' מתאפסת רק ב $x=-1$ ומוגדרת בכל $\mathbb{R}$. בנוסף, לפי הטבלה

x	-2	-1	0
$f'(x)$	$-$	0	$+$

נסיק שהפונקציה f יורדת בקרן $(-\infty,-1)$ ועולה בקרן $(-1,\infty)$ ולכן -1 הוא נקודת מינימום מוחלט של f.

(ב) כמה פתרונות יש למשוואה $x \cdot e^x = -\frac{1}{3}$?

פתרון: ראינו בסעיף קודם ש -1 נקודת מינימום מוחלט של f. הערך בנקודה הוא

$$f(-1) = -e^{-1} = -\frac{1}{e} < -\frac{1}{3}$$

מכיוון ש $e<3$ ולכן $\frac{1}{e}>\frac{1}{3}$ ולכן $-\frac{1}{e}<-\frac{1}{3}$. בנוסף,

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x\cdot e^x=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{-x}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

ולכן קיימים $-1<d$ כך ש $f(d)>0$ וקיים $c<-1$ כך ש $f(c)>-\frac{1}{4}$ ולכן בקטעים $[-1,d]$ ו $[c,-1]$ הפונקציה f עוברת את $-\frac{1}{3}$ פעם מלמטה ופעם מלמעלה ולכן, מכיוון ש f רציפה בקטעים אלו, לפי משפט ערך הביניים קיימות נקודות בקטעים (והנקודות שונות כי רק -1 נקודה משותפת ובה הערך שונה מ $-\frac{1}{3}$) כך שהערך של הפונקציה שווה $-\frac{1}{3}$. בנוסף, ראינו שבקטעים אלו הפונקציה עולה/יורדת ממש (לפי סימן הנגזרת) ולכן יש לכל היותר ערך אחד בכל קטע בו הפונקציה שווה $-\frac{1}{3}$. ובסה"כ קיבלנו שיש בדיוק שני ערכים בהם הערך של f שווה $-\frac{1}{3}$.

5. תהא $f(x)=x^2+bx+c$ פונקציה ריבועית.

(א) הוכיחו/הפריכו: קיים פתרון למשוואה $f(x)=\sin(x)$.
פתרון: הפרכה: עבור $f(x)=x^2+10$ מתקיים כי $f(x)\geq 10$ לכל x ובפרט אין x עבורו $f(x)=\sin(x)$ שהרי $|\sin(x)|\leq 1$.

(ב) הוכיחו/הפריכו: קיים פתרון למשוואה $f(x)=e^x$.
פתרון: הוכחה: נגדיר פונקציה

$$g(x)=e^x-\left(x^2+bx+c\right)$$

ונראה שיש לה שורש (זה שקול לשאלה). מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty} e^x-\left(x^2+bx+c\right)=\lim_{x\to\infty} e^x\left(1-\frac{\left(x^2+bx+c\right)}{e^x}\right)=\{\infty\cdot(1-0)\}=\infty$$

שהרי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+bx+c\right)}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{2x+b}{e^x}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

ולכן קיימת נקודה $d>0$ בה $g(d)>0$. ומתקיים

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x-\left(x^2+bx+c\right)=\{0-\infty\}=-\infty$$

שהרי

$$\lim_{x\to\infty} x^2+bx+c=\lim_{x\to\infty} x^2\left(1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)=\{\infty\,(1+0+0)\}=\infty$$

ולכן קיימת נקודה $c<0$ בה $g(c)<0$. מכיוון שבקטע $[c,d]$ הפוקציה g רציפה ומחליפה סימן, נקבל לפי משפט ערך הביניים כי g מתאפסת בנקודה בקטע כפי שרצינו להראות.