# חדו"א 1 לאודיסאה – 86-147 – פתרון בוחן שני – 12.01.23

1. (36 נק') חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+4^n}{3^n+1}$

$$\frac{2^n+4^n}{3^n+1}=\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot\frac{\left(\frac{2}{4}\right)^n+1}{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n}\to\infty\cdot\frac{0+1}{1+0}=\infty$$

ב. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^{\tan(x)}$

בסיס החזקה שואף ל1, ולכן מותר להשתמש בכלל הe

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin(x))^{\tan(x)}=e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)(\sin(x)-1)}$$

נחשב את הגבול של החזקה:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin(x)\cdot\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)}$$

כיוון ש $\sin(x)\to 1$ כאשר $x\to\frac{\pi}{2}$ נותר לחשב רק את הגבול הבא:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{-\sin(x)}=0$$

וסה"כ הגבול בתרגיל הוא $e^0=1$.

2. (36 נק') תהי $f$ פונקציה הגזירה בנקודה $x_0$, הביעו את הגבולות הבאים באמצעות $x_0,f,f'$:

א. $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-x}{x-x_0}+\frac{x_0-f(x_0)}{x-x_0}$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-x}{x-x_0}+\frac{x_0-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-1=f'(x_0)-1$$

ב. $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x^2)-f(x_0^2)}{x-x_0}$.

נפתור את התרגיל בשתי דרכים:

דרך ראשונה: הגבול בשאלה הוא גבול שיפועי המיתרים של הפונקציה $f(x^2)$, ולכן שווה לנגזרת שלה ב$x_0$.

לפי כלל השרשרת (נגזרת של הרכבה) נקבל כי

$$\left(f(x^2)\right)' = f'(x^2)\cdot 2x$$

ולכן סה"כ הגבול הוא $2x_0 f'(x_0)$.

דרך שנייה:

נכפול ונחלק בצמוד

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x^2)-f(x_0^2)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x^2)-f(x_0^2)}{x^2-x_0^2}\cdot (x+x_0) = f'(x_0^2)\cdot 2x_0$$

3. (36 נק')

א. עבור $f(x)=\sqrt{1-\cos(x^2)}$, חשבו את $f'(0)$.

אסור לגזור לפי נגזרת של הרכבה, כיוון שבנקודה $x=0$ הביטוי שבתוך השורש מתאפס, ופונקצית השורש אינה גזירה באפס.

לכן נגזור לפי ההגדרה, לפי גבול שיפועי המיתרים:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos(x^2)}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\frac{1-\cos(x^2)}{x^4}\cdot x^4}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1-\cos(x^2)}{(x^2)^2}}\cdot x=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot 0=0$$

ב. קרבו את $\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{4}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{100}$.

נקרב את הערך באמצעות פולינום טיילור של הפונקציה $\frac{1}{4}\sin(x)$ סביב הנקודה הרצוייה $a=0$ בנקודה המצוייה $x=\frac{1}{4}$.

ננחש $n=2$

$$f=\frac{1}{4}\sin(x)$$

$$f' = \frac{1}{4}\cos(x)$$

$$f'' = -\frac{1}{4}\sin(x)$$

$$f''' = -\frac{1}{4}\cos(x)$$

לכן לפי שארית טיילור בצורת לגראנז' קיימת $0 < c < \frac{1}{4}$ כך ש

$$R_2 = \frac{-\frac{1}{4}\cos(c)}{3!}\left(\frac{1}{4} - 0\right)^3$$

כיוון ש $|\sin(c)| \leq 1$ נקבל כי

$$|R_2| \leq \frac{1}{3! \cdot 4^4} < \frac{1}{100}$$

ולכן הקירוב הוא

$$\frac{1}{4}\sin\left(\frac{1}{4}\right) \approx P_2\left(f, 0, \frac{1}{4}\right) = f(0) + f'(0)\left(\frac{1}{4} - 0\right) + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{1}{4} - 0\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$