83-116 מתמטיקה בדידה – תרגיל 2 פתרונות

<u>שאלה 1</u> הוכח או הפרך:

א. $A \cap B \subseteq A$

$x \in A \cap B \Longrightarrow x \in A$ וגם $x \in B \;\Longrightarrow x \in A$

ב. $A \cup B \subseteq A$

דוגמא נגדית: $B = \{1\}$ $A = \emptyset$ כי $A \cup B = \{1\} \nsubseteq \emptyset = A$

ג. $A \cap B \subseteq A \cup B$

$x \in A \cap B \;\Longrightarrow x \in A$ וגם $x \in B \;\Longrightarrow x \in A$ או $x \in B \;\Longrightarrow x \in A \cup B$

ד. $A^c \setminus B \subseteq (A \cup B)^c$

$A^c \setminus B = A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$ (השוויון האחרון לפי דה מורגן)

<u>שאלה 2</u> הוכח או הפרך:

א. $A \vartriangle (B \cap C) = (A \vartriangle B) \cap (A \vartriangle C)$

דוגמא נגדית: $c = \emptyset$ $B = \{1,2\}$ $A = \{1\}$ כי $\{1\} \neq \emptyset$

ב. $A \vartriangle (B \cup C) = (A \vartriangle B) \cup (A \vartriangle C)$

דוגמא נגדית: $c = \emptyset$ $B = \{1,2\}$ $A = \{1\}$ כי $\{2\} \neq \emptyset$

ג. $A \vartriangle (B \vartriangle C) = (A \vartriangle B) \vartriangle C$

ד. $A \cap (B \vartriangle C) = (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$

הוכחה: $A \cap (B \vartriangle C) = A \cap [(B \cup C)\setminus(B \cap C)] =$

$=(A \cap (B \cup C))\setminus(A \cap (B \cap C)) =$

$= [(A \cap B) \cup (A \cap C)]\setminus[A \cap A \cap (B \cap C)] =$

$= [(A \cap B) \cup (A \cap C)]\setminus[(A \cap B) \cap (A \cap C)] =$

$= (A \cap B) \vartriangle (A \cap C)$

ה. $A \cup (B \vartriangle C) = (A \cup B) \vartriangle (A \cup C)$

דוגמא נגדית $B = C = \emptyset$ $A = \{1\}$ כי $\{1\} \neq \emptyset$

<u>שאלה 3</u> הוכח או הפרך:

א. $P(A)\setminus P(B) = P(A\setminus B)$

דוגמא נגדית : $A = B = \emptyset$
כי $P(A)\backslash P(B) = \emptyset \neq P(A\backslash B) = P(\emptyset) = \{\emptyset\}$

ב. $P(A) \vartriangle P(B) = P(A \vartriangle B)$

אותה דוגמא נגדית בדיוק.

שאלה 4

כתוב את קבוצת החזקה של $\mathrm{A} = \{\emptyset,\ 0,\ \{0\}\}$

האם $\mathrm{P(A)} \subseteq \emptyset$? כן $\emptyset \in \mathrm{P(A)}$? כן $\{\emptyset\} \subseteq \mathrm{P(A)}$? כן

האם $\{0\} \subseteq \mathrm{P(A)}$? לא

שאלה 5 הוכח או הפרך:

א. $A \times (B\backslash C) = (A \times B)\backslash(A \times C)$

הוכחה:

כיוון א':

$(a,b) \in A \times (B\backslash C) \Longrightarrow a \in A$ וגם $b \in B\backslash C \Longrightarrow a \in A$ וגם $b \in B$ וגם $b \notin C \Longrightarrow (a \in A$ וגם $b \in B)$וגם$(a \in A$ וגם $b \notin C) \Longrightarrow$
$(a,b) \in A \times B$וגם $(a,b) \notin A \times C \Longrightarrow (a,b) \in (A \times B)\backslash(A \times C)$

כיוון ב':

$$(a,b) \in (A \times B)\backslash(A \times C) \Longrightarrow$$
$$(a,b) \in (A \times B) \ \wedge \ (a,b) \notin (A \times C) \overset{*}{\Rightarrow}$$
$$a \in A \ \wedge b \in B \ \wedge [(a \in A \ \wedge b \notin C) \vee a \notin A] \overset{**}{\Rightarrow}$$
$$a \in A \ \wedge b \in B \ \wedge b \notin C \ \Longrightarrow a \in A \ \wedge b \in B\backslash C \ \Longrightarrow$$
$$(a,b) \in A \times (B\backslash C)$$

קצת הסבר על *: יש רק 2 אפשרויות $a \notin A$ או $a \in A$
אם $a \notin A$ אז ברור ש $(a,b) \notin A \times C$ (לא משנה לאן b שייך)
אם $a \in A$ אז כדי ש $(a,b) \notin A \times C$ בהכרח $b \notin C$

קצת הסבר על **: לפי החלק השמאלי באותה שורה $a \in A$ ולכן האפשרות ש $a \notin A$ נעלמת.

ב. אם $(A\times B)\cap(C\times D)=\emptyset$
אזי $(\, A\cap C=\emptyset\,)$ או $(\, B\cap D=\emptyset)$
(כדי להוכיח $y \Longrightarrow x$ אפשר להראות $\neg x \Longrightarrow \neg y$)
נניח $A\cap C\neq\emptyset$ וגם $B\cap D\neq\emptyset$,
אזי $\exists\, x\in A\cap C,\ \ y\in B\cap D$
אבל אז $(x,y)\in(A\times B)\cap(C\times D)$
כלומר ש $(A\times B)\cap(C\times D)\neq\emptyset$

ג. $P(A\times B)=P(A)\times P(B)$
די ברור שאין כאן שיוויון. הקב' מימין מכילה זוגות סדורים של קבוצות ואילו הקבוצה משמאל מכילה קבוצות של זוגות סדורים. דוגמא נגדית: $A=\{1\},B=\emptyset$.
שימו לב ש $A\times B=\emptyset$ ולכן $P(A\times B)=\{\emptyset\}$
ואילו $P(A)\times P(B)=\{(\emptyset,\emptyset),(\{1\},\emptyset)\}$

שאלה 6

תהי A קבוצה בעלת n איברים. כמה איברים יש ב- $P(P(P(A)))$?

לפי המשפט:

$$\mathbf{2}^{|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A}))|}=\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{|\boldsymbol{P}(\boldsymbol{A})|}}=\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{|\boldsymbol{A}|}}}=\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}}}$$

(טעות שכיחה: $\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}}}\neq 16^n$)