פתרון בוחן ב' בקורס תורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ג

מרצים: פרופ' עוזי וישנה ופרופ' מיכאל מגרל

מתרגלים: תומר באואר וגיא בלשר

הוראות:

- יש לענות על כל שלוש השאלות פתרון מלא ומנומק.
- כתבו את תשובותיכם על גבי טופס הבחינה. ניתן להשתמש בשני צידי הדף. מחברת הטיוטה לא תיבדק.
- משך הבוחן: 90 דקות.
- סך הנקודות עולה על 100, אך הציון המקסימלי בבוחן הינו 100.
- חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

בהצלחה!

Lecturers: Prof. Uzi Vishne and Prof. Michael Megrel

Teaching assistants: Tomer Bauer and Guy Blachar

Instructions:

- Provide a full and detailed solution to all three questions.
- Write your answer on the exam form. You may use both sides of the paper. The draft notebook will not be checked.
- Total time: 90 minutes.
- The total score exceeds 100, but the maximal grade in the quiz is 100.
- Other resources: You may use a simple calculator.
- You may answer in English or Hebrew, as you wish.

Good Luck!

שאלה 1. תהי G חבורה הפועלת על קבוצה X.

א. (15 נק') הוכיחו כי G פועלת על קבוצת החזקה $P(X)$ לפי

$$g * A = \{g * x \mid x \in A\}$$

לכל $A \in P(X)$ ו-$g \in G$.

ב. (15 נק') נתבונן במקרה שבו $G = S_8$ ו-$X = \{1, \ldots, 8\}$ לפי הפעולה הרגילה. מצאו את גודל המסלול של האיבר $\{2, 1, 8\} \in P(X)$ בפעולה שהוגדרה בסעיף הקודם. נמקו את תשובתכם.

Question 1. Let G be a group acting on a set X.

a. (15 pts) Prove that G acts on the power set $P(X)$ by

$$g * A = \{g * x \mid x \in A\}$$

for any $A \in P(X)$ and $g \in G$.

b. (15 pts) Consider the case where $G = S_8$ and $X = \{1, \ldots, 8\}$ with the usual action. Find the size of the orbit for the element $\{2, 1, 8\} \in P(X)$ under the action defined in the previous item. Justify your answer.

פתרון.

א. נוכיח לפי הגדרה. נשים לב כי $g * x \in X$ לכל $g \in G$ ו-$x \in X$. לכן בפעולה החדשה שהגדירו $g * A \subseteq X$. כלומר $g * A \in P(X)$, ומכאן שהפעולה מוגדרת היטב.
נבדוק כי איבר היחידה $e \in G$ פועל טריוויאלית על כל $A \in P(X)$:

$$e * A = \{e * x \mid x \in A\} \stackrel{\star}{=} \{x \mid x \in A\} = A$$

כאשר השתמשנו בשיוויון המסומן $\star$ בכך ש-$e * x = x$ לפי הפעולה של G על X. כעת לכל $g, h \in G$ נבדוק

$$\begin{aligned} g * (h * A) &= g * \{h * x \mid x \in A\} = \{g * (h * x) \mid x \in A\} \\ &\stackrel{\star}{=} \{(gh) * x \mid x \in A\} = (gh) * A \end{aligned}$$

כאשר בשיוויון המסומן $\star$ השתמשנו בכך ש-$g * (h * x) = (gh) * x$ לפי הפעולה של G על X. בסך הכל G פועלת על הקבוצה $P(X)$.

ב. בפעולה של S_8 על $X = \{1, \ldots, 8\}$ נשים לב שאם $x, y \in X$ שונים, אז $\sigma * x \neq \sigma * y$, שהרי σ תמורה (ובפרט פונקציה חח"ע). מפני ש-$\{2, 1, 8\}$ קבוצה עם שלושה איברים שונים, אזי גם

$$\sigma * \{2, 1, 8\} = \{\sigma(2), \sigma(1), \sigma(8)\}$$

היא קבוצה עם שלושה איברים שונים. בפרט במסלול של $\{2, 1, 8\}$ יש רק תת־קבוצות בנות שלושה איברים של X. למעשה כל תת־קבוצה בת שלושה איברים נמצאת במסלול. נניח $\{x, y, z\}$ היא קבוצה כזו. אז ניתן למצוא תמורה $\sigma \in S_8$ עבורה

$$\sigma(2) = x, \sigma(1) = y, \sigma(8) = z$$

ועל שאר המספרים שאינם ב-$\{2,1,8\}$ תהיה תמורה כלשהי (הרי יש חמישה מספרים שיש לשלוח, ויש חמישה מספרים בטווח). לכן $\sigma * \{2,1,8\} = \{x,y,z\}$. מספר תת־הקבוצות בגודל 3 של קבוצה בגודל 8 הוא $\binom{8}{3} = 56$.
הערה: יש כאלו שהשתמשו במשפט מסלול-מייצב, שבו הם חישבו שסדר המייצב של $\{2,1,8\}$ הוא $3!5!$, והסדר של S_8 הוא $8!$, ולכן גודל המסלול הוא $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!}$. זו גם הוכחה טובה, כל עוד מצטטים ומוכיחים את הדרוש.

שאלה 2. יהי p ראשוני אי־זוגי, ותהי G חבורה מסדר $2p$ שיש לה תת־חבורה <u>לא נורמלית</u> $H \le G$.

א. (5 נק') מצאו את הסדר $|H|$.

ב. (15 נק') הוכיחו כי $C_G(H) = H$.

ג. (15 נק') מצאו לכל $a \in H$ את גודל מחלקת הצמידות $|\mathrm{conj}_G(a)|$.

תזכורת: המְרַכֵּז של תת־קבוצה $S \subseteq G$ הוא $C_G(S) = \{g \in G \mid \forall s \in S : gs = sg\}$.

Question 2. Let p be an odd prime, and let G be a group of order $2p$ which has a <u>non-normal</u> subgroup $H \le G$.

a. (5 pts) Find the order $|H|$.

b. (15 pts) Prove that $C_G(H) = H$.

c. (15 pts) For any $a \in H$ find the size of the conjugacy class $|\mathrm{conj}_G(a)|$.

Reminder: The centralizer of a subset $S \subseteq G$ is $C_G(S) = \{g \in G \mid \forall s \in S : gs = sg\}$.

פתרון. אתגר: הראו כי $G \cong D_p$, אם אכן יש לה תת־חבורה כזו H.

א. הסדר של H חייב לחלק את הסדר של G, לפי משפט לגראנז'. המחלקים של $|G| = 2p$ הם רק $1, 2, p, 2p$. תת־החבורה היחידה מסדר 1 היא $\{e\}$, והיא נורמלית ב-G, ולכן $|H| \neq 1$ לפי הנתון ש-H אינה נורמלית. תת־החבורה היחידה מסדר $2p$ היא G, והיא נורמלית ב-G, ולכן $|H| \neq 2p$. תת־חבורה מסדר p היא מאינדקס $\frac{2p}{p} = 2$, ולפי תרגיל שראינו בכיתה תת־חבורה מאינדקס 2 היא תמיד נורמלית, ולכן $|H| \neq p$. בסך הכל קיבלנו כי $|H| = 2$ לפי שלילת שאר הסדרים.

ב. לפי הסעיף הקודם $H = \{e, a\}$ כאשר $a \neq e$. לכן $H = \langle a \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ כי היא מסדר ראשוני, ולכן ציקלית. לכן H אבלית, וכל האיברים בה מתחלפים עם כל איברי H. לכן $H \subseteq C_G(H)$.
ניתן להוכיח בדרכים אחרות: למשל ברור כי $e \in C_G(H)$ מפני ש-e מתחלף עם כל איבר ב-G, ובפרט ב-H (או כי המְרַכֵּז הוא תת־חבורה, ותת־חבורה תמיד מכילה את איבר היחידה). בנוסף a בוודאי מתחלף עם a, ונסיק $H \subseteq C_G(H)$. כך גם ניתן להסיק כי $C_G(H) = C_G(a)$ במקרה הזה.
עבור הוכחת ההכלה $C_G(H) \subseteq H$ נשים לב כי $C_G(H) \le G$ מסדר המתחלק ב-2 (כי $H \le C_G(H)$). כלומר הסדר של $C_G(H)$ הוא 2 או $2p$ לפי משפט לגראנז'. אבל אם $|C_G(H)| = 2p$, אז נקבל כי $C_G(H) = G$, ואז H נורמלית. לכן $|C_G(H)| = 2$ ומשיקולי גודל $C_G(H) = H$.

ג. יש רק שני איברים ב-H. האיבר e שייך למרכז $Z(G)$, ולכן $\mathrm{conj}_G(e) = \{e\}$. או לפי חישוב ישיר $geg^{-1} = gg^{-1} = e$ לכל $g \in G$. כלומר $|\mathrm{conj}_G(e)| = 1$. אגב, לא ייתכן כי $a \in Z(G)$, שכן אז $H \subseteq Z(G)$, ונקבל ש-H נורמלית ב-G.
נעזר במשפט מסלול-מייצב. בסעיף הקודם ראינו כי $C_G(H) = C_G(a)$. לכן

$$|G| = |\mathrm{conj}_G(a)|\,|C_G(a)| = |\mathrm{conj}_G(a)|\,|C_G(H)| = |\mathrm{conj}_G(a)|\,|H|$$

נסיים לפי הסעיף הראשון בו חישבנו $|H| = 2$, ולכן $|\mathrm{conj}_G(a)| = \frac{2p}{2} = p$.

שאלה 3.

א. (20 נק') <u>הפריכו:</u> קיימת הטלה (אפימורפיזם) $f\colon \mathbb{Z}_2 \times S_3 \to \mathbb{Z}_6$.

ב. (20 נק') <u>הוכיחו:</u> קיים שיכון (מונומורפיזם) $f\colon U_{14} \times A_4 \to A_{11}$.
מציאת שיכון ל-A_{12} במקום A_{11} תזכה בניקוד חלקי.

Question 3.

a. (20 pts)
<u>Disprove:</u> There exists a projection (epimorphism) $f\colon \mathbb{Z}_2 \times S_3 \to \mathbb{Z}_6$.

b. (20 pts)
<u>Prove:</u> There exists an embedding (monomorphism) $f\colon U_{14} \times A_4 \to A_{11}$.
Finding an embedding to A_{12} instead of A_{11} will grant you a partial credit.

פתרון.

א. נניח בשלילה שקיימת הטלה f כזו. בפרט $\mathrm{im}\, f = \mathbb{Z}_6$. לפי משפט האיזומורפיזמים הראשון נסיק

$$|\mathbb{Z}_2 \times S_3/\ker f| = |\mathrm{im}\, f| = |\mathbb{Z}_6|$$

וידוע לנו כי $|\mathbb{Z}_n| = n$ ו-$|S_3| = 3! = 6$. לכן

$$|\mathbb{Z}_2 \times S_3| = 2 \cdot 6 = |\mathbb{Z}_6|\,|\ker f| = 6\,|\ker f|$$

כלומר $|\ker f| = 2$. הגרעין של הומומורפיזם הוא תמיד תת־חבורה נורמלית. במקרה זה הגרעין הוא תת־חבורה ציקלית, כי הוא מסדר ראשוני. לכן מספיק לחפש את תת־החבורות הנוצרות על ידי איברים מסדר 2, ולבדוק שהמנה לגביהם לא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_6$.
האיברים $(a,b) \in \mathbb{Z}_2 \times S_3$ מסדר 2 מקיימים

$$o(a,b) = [o(a), o(b)] = 2$$

ולכן הסדרים של a ושל b מחלקים את 2, ולפחות אחד מהם הוא 2. תת־החבורה הנוצרת על ידי $(1,\mathrm{id})$ היא מסדר 2, והיא גם נורמלית. אבל

$$\langle(1,\mathrm{id})\rangle = \mathbb{Z}_2 \times \{\mathrm{id}\}$$

לכן $S_3 \cong \mathbb{Z}_2 \times S_3/\mathbb{Z}_2 \times \{\mathrm{id}\}$. אבל S_3 אינה אבלית, ולכן לא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_6$, שהיא אבלית. שאר האיברים מסדר 2 הם מן הצורה $(a, (i\ j))$ כאשר $a \in \mathbb{Z}_2$ כלשהו ו-$(i\ j) \in S_3$ חילוף. אבל תת־החבורה הנוצרת על ידי איבר כזה:

$$H = \langle (a, (i\ j)) \rangle = \{(0, \mathrm{id}), (a, (i\ j)\}$$

אינה נורמלית. נראה זאת לפי זה שאינה סגורה להצמדה. נניח $\{1,2,3\} = \{i,j,k\}$ (כלומר k שונה מ-i ומ-j), אז

$$\begin{aligned}(0,(i\ k))(a,(i\ j)(0,(i\ k))^{-1} &= (0,(i\ k))(a,(i\ j))(0,(i\ k)) \\ &= (0,(i\ k))(a,(i\ k\ j)) = (a,(k\ j)) \notin H\end{aligned}$$

לכן אין הטלה f כזו.
דרך אחרת, בשיטה שלא כל כך ראינו: בחבורה $\mathbb{Z}_6$ יש שני איברים מסדר 6 (אלו הם 1 ו-5). מפני שבהטלה כמו בשאלה הגרעין הוא מסדר 2, אז בתמונה ההפוכה של כל אחד מן האיברים האלו יהיו בדיוק שני איברים מסדרים המתחלקים ב-6. בחבורה $\mathbb{Z}_2 \times S_3$ האיברים מהסדר המרבי הם מסדר 6, ויש רק שניים כאלו והם $(1,(1\ 2\ 3))$ ו-$(1,(1\ 3\ 2))$. אבל דרושים ארבעה איברים כאלו, ולכן אין כזו הטלה.

ב. נבנה פונקציה

$$f\colon U_{14} \times A_4 \to A_{11}$$

ונוכיח כי f הוא שיכון. תחילה נשים לב כי קל לשכן $\psi\colon A_4 \hookrightarrow A_{11}$ לפי שליחת תמורה $\sigma \in A_4$ לתמורה ב-A_{11} שפועלת כמו σ על $\{1,2,3,4\}$ ומקבעת את שאר המספרים $\{5,\ldots,11\}$. ברור שבמקרה כזו $\psi(\sigma)$ היא תמורה זוגית, כי σ היא זוגית.
נחשב את $|U_{14}| = \varphi(14) = 14\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right) = 6$, או ישירות $U_{14} = \{1,3,5,9,11,13\}$ שהם המספרים שקטנים וזרים ל-14. אגב, החבורה U_{14} היא ציקלית, למשל כי 3 או 5 יוצרים אותה (לבדם). דרך אחרת לראות זאת, היא להזכר שכל חבורה אבלית מסדר 6 איזומורפית ל-$\mathbb{Z}_6$, למשל כי קיים בה איבר a מסדר 2 (שהרי 6 זוגי) ואיבר b מסדר 3 (כי לא ייתכן שכל האיברים מסדר 1 או 2), ומחשבים כי ab הוא מסדר 6.
לכן כל הומומורפיזם שתחומו U_{14} נקבע לפי תמונת 3. כדי שההומומורפיזם הזה יהיה חח"ע מספיק לשלוח את 3 לאיבר מסדר 6. בחבורה A_7 האיברים מסדר 6 הם רק תמורות ממבנה מחזורים $(3,2,2)$, שכן תמורות ממבנה מחזורים $(3,2)$ או מחזורים מאורך 6 אינן זוגיות. נבחר את

$$\tau = (5\ 6\ 7)(8\ 9)(10\ 11) \in A_{\{5,\ldots,11\}}$$

ואז הפונקציה שחיפשנו תהיה

$$f(a,\sigma) = \varphi(\sigma)\tau^a$$

שהיא הרכבה של שיכונים $A_4 \hookrightarrow A_{11}$ ו-$U_{14} \hookrightarrow A_{11}$, ולכן שיכון. יש לבדוק שהתמונות של שני השיכונים האלו זרות להשלמת ההוכחה.
עבור הגרסה הקלה יותר, נזכר שלפי משפט קיילי קיים שיכון $\psi'\colon U_{14} \hookrightarrow S_6$, וראינו שישנו שיכון $S_n \hookrightarrow A_{n+2}$ לכל $n \geq 2$. לכן U_{14} משוכנת ב-A_8. כעת ניתן להרכיב זאת עם שיכון $A_8 \times A_4 \hookrightarrow A_{12}$ לפי פעולה על $\{1,\ldots,8\}$ ברכיב הראשון ועל $\{9,10,11,12\}$ ברכיב השני.