פתרון תרגיל בית 5 בשדות ותורת גלואה
88-311 סמסטר א' תשע"ט

שאלה 1. קבעו האם הפולינומים הבאים ספרביליים.

א. $x^3-6x^2+12x-8$ מעל $\mathbb{Q}$.

ב. $x^5-3x^3-2x^2+2x+2$ מעל $\mathbb{Q}$.

ג. $x^{10}+x^5+3$ מעל $\mathbb{F}_5$.

ד. x^p-x+a מעל שדה F ממאפיין $p>0$ (שראינו כבר בכיתה).

פתרון.

א. נחשב $f'(x)=3x^2-12x+12=3(x-2)^2$, מכיוון שישנם רק גורמים לינאריים, מספיק לבדוק אם מישהו מהם מחלק את $f(x)$, ואפשר לבדוק זאת עם הצבה. אכן $f(2)=0$, ולכן $(x-2)$ הוא גורם משותף של f ו-f' מה שאומר ש-$f(x)$ לא ספרבילי.

ב. ניתן לראות (ולהיעזר בשיטה שראינו למציאת שורשים רציונאליים) כי ±1 הם שורשים של $f(x)$, ולכן מתפרק ל- $f(x)=(x-1)(x+1)(x^3-2x-2)$. מפני ש-$\pm1$ הם לא שורשים של x^3-2x-2, אז $f(x)$ ספרבילי אם ורק אם x^3-2x-2 ספרבילי. ואכן, x^3-2x-2 הוא אי פריק (למשל לפי אייזנשטיין עם 2) ובמאפיין 0 זה גורר שהפולינום ספרבילי.

ג. הנגזרת היא 0 ולכן הפולינום לא ספרבילי.

ד. נחשב $f'(x)=px^{p-1}-1\equiv-1$. לכן $(f,f')=1$ ומכאן שהפולינום ספרבילי.

שאלה 2. יהי F שדה ממאפיין $p>0$, ויהי $a\in F$ איבר שאין לו שורש מסדר p. הוכיחו כי $f(x)=x^p-a$ הוא לא ספרבילי. רשות: הוכיחו שהוא גם אי פריק.

פתרון. יהי E שדה הפיצול של $f(x)$. יהי $\alpha\in E$ שורש של $f(x)$. אזי $\alpha^p=a$. לכן

$$f(x)=x^p-a=x^p-\alpha^p=(x-\alpha)^p$$

כי אנחנו בשדה ממאפיין p. כלומר כל השורשים הם α, ולכן הפולינום לא ספרבילי.

שאלה 3. תהי K/F הרחבת שדות ויהיו $f,g\in F[x]$ פולינומים עם שדות פיצול L_1,L_2 בהתאמה. הוכיחו כי תת־השדה הכי קטן של K שמכיל את L_1 ו-L_2 הוא גם שדה פיצול מעל F (אולי של פולינום אחר).

פתרון. יהי L שדה הפיצול של המכפלה $f\cdot g$ מעל F. מצד אחד כל השורשים של f,g נמצאים ב-L ולכן L מכיל את L_1,L_2. מצד שני, אם L' הוא שדה אחר המכיל את L_1,L_2, אז הוא מכיל גם את כל השורשים של f,g ולכן הוא מפצל את $f\cdot g$. לכן לפי ההגדרה של שדה פיצול $L\subseteq L'$ כנדרש.

שאלה 4. יהי פולינום $f(x) \in F[x]$, ויהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כל שורשי הפולינום.
הוכיחו כי שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא $F[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

פתרון. נסמן את הפולינום $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ כאשר $a_i \in F$. מעל שדה הפיצול $f(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$ נכפול ונקבל שהמקדם החופשי הוא

$$\alpha_1 \cdots \alpha_n = a_0 \in F$$

לכן $F[\alpha_2, \dots, \alpha_n] \ni \alpha_1 = \frac{a_0}{\alpha_2 \cdots \alpha_n}$ ומכאן ששדה הפיצול הוא $F[\alpha_1, \dots, \alpha_n] = F[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

שאלה 5. תהי K/F הרחבת שדות ממימד 2. הסיקו מהשאלה הקודמת ש-K הוא שדה פיצול של פולינום כלשהו ב-$F[x]$.

פתרון. ניקח $\alpha \in K \backslash F$. ברור ש-$K = F(\alpha)$ ולכן הפולינום המינימלי של α מדרגה 2. כלומר

$$f(x) = x^2 + bx + c$$

נניח שהמאפיין של השדות שונה מ-2, אזי השורשים הם כמובן

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

מפני ש-$\alpha \in K$ קל לראות ש-$\sqrt{b^2 - 4c} \in K$, ולכן גם השורש השני ב-K. כלומר K שדה מפצל של הפולינום. היות ואין עוד שדות בין K לבין F, אז K הוא שדה הפיצול.
פתרון שמתאים לכל מאפיין: α הוא שורש של הפולינום $f(x)$ שלמעלה. לכן ב-K מתקיים

$$x - \alpha \mid f(x)$$

אבל $f(x)$ בסך הכל ממעלה 2 וזה אומר שב- K מתקיים $f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$. לכן $\alpha^{-1} \cdot \alpha\beta = \beta \in K$ כי $\alpha^{-1} \in K$ וגם $\alpha\beta \in F \subseteq K$. לכן K מפצל את $f(x)$, והוא ממש שדה הפיצול כי כל שדה קטן יותר יהיה F בעצמו.

שאלה 6 (רשות)**.** יהי $f = x^5 + x^3 + x + 1 \in F[x]$. הוכיחו כי f ספרבילי אם ורק אם $\operatorname{char} F \neq 11, 37$.

פתרון. מחשבים את בעזרת אלגוריתם אוקלידס המורחב ומגלים כי

$$\begin{aligned}\gcd(f, f') = 1 \\ &= \left(-\frac{190}{407}x^3 + \frac{80}{407}x^2 - \frac{284}{407}x + \frac{33}{37}\right) f + \\ &\quad \left(\frac{38}{407}x^4 - \frac{16}{407}x^3 + \frac{72}{407}x^2 - \frac{79}{407}x + \frac{4}{37}\right) f'\end{aligned}$$

נשים לב ש-$407 = 11 \cdot 37$, ולכן מדובר בחילוק באפס בשדות ממאפיין 11 או 37. בשדות כאלו המחלק המשותף המרבי הוא פולינום ממעלה חיובית.

בהצלחה!