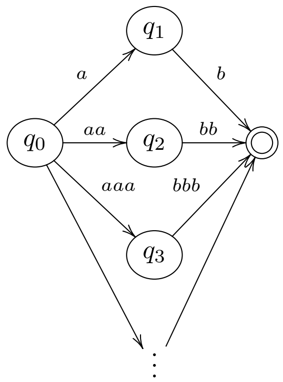
שפות לא רגולריות

שפה לא רגולרית היא שפה שאין לה אוטומט. בהינתן שפה ואוטומט, אפשר להראות שהאוטומט לא מקבל את השפה באמצעות מציאת מילה שקיימת בשפה והאוטומט לא מקבל, או שלא קיימת בשפה והאוטומט מקבל. אבל זה לא מספיק בשביל להוכיח שהשפה לא רגולרית - צריך להוכיח ש<u>לא קיים</u> אוטומט שמקבל אותה.

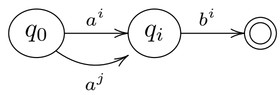
דוגמה

$$L = a^n b^n$$

נניח שקיים אוטומט בעל m מצבים שמקבל את L. האוטומט הזה חייב לזכור כמה aים הוא קרא, כדי לדעת כמה bים הוא צריך לקבל. נתבונן בקריאת המילה $a^m b^m$:



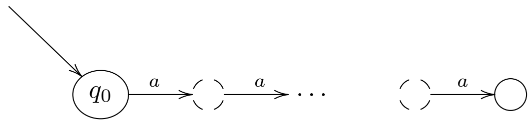
יש להבחין בין $m+1$ סיטואציות שונות $a^0, a^1, \ldots a^m$ ע"י $m+1$ מצבים, אבל הנחנו רק m מצבים ולכן(ע"פ עקרון שובך היונים) לפחות 2 מצבים הינם זהים. נסמנם q_i, q_j $(i \neq j)$.
במצב שכזה נקבל



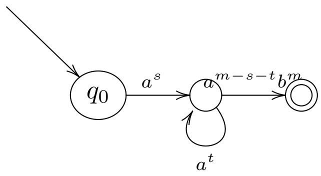
$\Leftarrow$ $a^i b^i \in L\left(A\right)$ כנדרש, אבל גם $a^j b^i \in L\left(A\right)$ - אך לא בשפה! $\Leftarrow$ סתירה לקיומו של A

למת הניפוח - תכונה של שפות רגולריות

נניח A בעל m מצבים. נתבונן בקריאת הרישא a^m בביטוי $a^m b^m$. בקריאת a^m נעבור ב$m+1$ מצבים, אבל יש לנו רק m מצבים:



$\Leftarrow$ נעבור בלפחות מצב אחד פעמיים בקריאת a^m:



למת הניפוח

הגדרה

1. לכל שפה רגולרית L
2. קיים n
3. כך שלכל $z \in L$, $|z| \geq n$
4. קיים פירוק $z = uvw$ כך ש
   (א) $|uv| \leq n$
   (ב) $|v| \geq 1$
5. כך שלכל $i \in \mathbb{N}_0$, $z' = u\left(v\right)^i w \in L$

איך משתמשים?

כדי להראות L לא רגולרית:

- נניח בשלילה L רגולרית.
- יהי n (n לא לבחירתנו)
- נבחר $z \in L$, $|z| \geq n$

- יהי פירוק $\begin{matrix} a = uvw \\ |uv| \leq n \\ |u| \geq 1 \end{matrix}$ (הפירוק לא לבחירתנו)
- נבחר $i \in \mathbb{N}_0$ כך ש$z' = u\left(v\right)^i w \notin L$

דוגמה

תהי L שפה בעלת מספר סופי של מילים

1. האם L רגולרית?

L רגולרית, שכן לכל מילה בשפה ניתן לבנות ביטוי רגולרי שיקבל רק אותה, ואז לעשות $\cup$ לכל הביטויים הרגולריים.

2. האם L מקיימת את למת הניפוח?

מתקיימת הלמה באופן ריק - עבור nו השווה לערך המילה המקסימלית בL + 1.

שאלות

הוכח ע"י למת הניפוח שהשפות הבאות אינן רגולריות מעל $\Sigma = \{a, b\}$

תבנית

- נניח בשלילה L רגולרית.
- יהי n מלמת הניפוח.
- נבחר $z = ?$ כך ש$|z| \geq n$, $z \in L$.
- יהי פירוק $z = uvw$ כך ש$|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$
- נבחר $i \in \mathbb{N}_0$, $i = ?$. נראה $z' \notin L$ - סתירה

1. $L = \{w | \#_a\left(w\right) = \#_b\left(w\right)\}$

- נניח בשלילה L רגולרית.
- יהי n מלמת הניפוח.
- נבחר $z = a^n b^n$.
- יהי פירוק $z = uvw$ כך ש$|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$. אזי בהכרח $u = a^s; v = a^t; w = a^{n-s-t}b^n$.
- נבחר $i \in \mathbb{N}_0$, $i = 0$.

$$z' = uv^0w = uw = a^s a^{n-s-t} b^n = a^{n-t} b^n \notin L$$

$\Leftarrow$סתירה ולכן L לא רגולרית.

.2 $L = \left\{ w \middle| w = w^R \right\}$

- נניח בשלילה L רגולרית.
- יהי n מלמת הניפוח.
- נבחר $z = a^n b a^n$.
- יהי פירוק $z = uvw$ כך ש $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$. אזי $u = a^s, v = a^t$
- נבחר $i \in \mathbb{N}_0$, $i = 2$. נקבל

$$z' = uv^2w = u \cdot v \cdot v \cdot w = a^{n+t}ba^n \notin L$$

.3 $L = \left\{ a^k b a^{n_1} b a^{n_2} b \cdots a^{n_r} b \middle| \forall_{1 \leq j \leq r} n_j \neq k \right\}$

נבחר $z = a^n b a^{n+1} b$. נבחר $i = 2$ ונקבל

$$z' = uv^2w = a^{n+t}ba^{n+1}b$$

נקבל סתירה $(z' \notin L)$ כאשר $n + t = n + 1$ - אבל הנ"ל לא מובטח
נציע פתרון חלופי:

$$z = a^n b a^{n+1} b a^{n+2} b \cdots a^{n+n} b$$

נבחר $i = 2$ ונקבל

$$z' = a^{n+t} b a^{n+1} b \cdots a^{n+n} b$$

ידוע $1 \leq t$, $s + t \leq n$ $\Leftarrow$ $1 \leq t \leq n$ $\Leftarrow$ $1 + n \leq n + n$ $< 1 + n$ ולכן בהכרח קיים j כך ש $nj = n + t$ $\Leftarrow$ $z' \notin L$ ולכן L לא רגולרית.

אינטואיציה מתי שפה לא רגולרית

- בעיות ספירה(זכירה) לא מוגבלת(לדוגמא $\#_a = \#_b$)
- קיום נוסחא(למשל a^{n^2})

המשך שאלות

.4 $L = \{ ww | w \in \Sigma^* \}$

יהי n מלמת הניפוח. ניקח $z = a^n b a^n b$

$$z' = a^{n-t}ba^nb \notin L \qquad 1 \leq t$$

שאלה

$$L = \left\{a^i b^j \middle| i \neq j\right\}$$

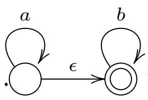
הוכח ש־K לא רגולרית:

1. ע"י סגירות
2. ע"י למת הניפוח

פתרון

1. נניח בשלילה L רגולרית. מסגירות נקבל $L' = \{\cdots\}$ רגולרית, אך ידוע L' לא רגולרית - סתירה.
   ניקח את השפה הבאה:

$$\{a^* b^*\} - L = a^n b^n$$

   $\{a^* b^*\}$ רגולרית - . אבל $a^n b^n$ לא רגולרית.

2. נניח בשלילה L רגולרית. יהי n מלמת הניפוח. נבחר $z = a^n b^{n+1}$, $z \in L$, $|z| \geq n$. יהי פירוק $z = uvw$,
$$\begin{matrix} s+t \leq n \\ t \geq 1 \end{matrix}, \quad \begin{matrix} u = a^s \\ v = a^t \\ w = a^{n-s-t} b^{n+1} \end{matrix}$$
   נבחר $i = 1$.
   נקבל $z' = uv^2w = a^{n+t} b^{n+1}$. נקבל סתירה כאשר $n + t = n + 1$ - אבל לא מובטח לנו ש־$t = 1$!

   - ננסה פירוק נוסף:

$$z' = uv^i w = uvv^{i-1} w = a^{n+t(i-1)} b^{n+1}$$

   כדי לקבל סתירה, נדרוש $n + t\,(i-1) = n + 1$, $t\,(i-1) = 1$, $i = \frac{1}{t} + 1$ - אבל לא בטוח ש־i הנ"ל מקיים $i \in \mathbb{N}_0$!

   - נסיון שלישי:

$$z = a^n b^k \qquad k \neq n$$

   נבחר $i \in \mathbb{N}_0$ ונקבל סתירה כאשר $z' \notin L$

$$z' = uv^i w = uvv^{(i-1)} u = a^{n+(i-1)t} \cdot b^k \notin L$$

   כאשר $n + (i-1)\,t = k$. האילוצים שלנו הם

$$k \neq n \qquad i \in \mathbb{N}_0$$

נדרוש

$$i = \frac{k-n}{t} + 1 \in \mathbb{N}_0$$

צריך $t|k-n$. מובטח לנו $1 \leq t \leq n$. איזה מספר יתחלק תמיד בt? $n!$. ואז

$$i = \frac{k-n}{t} + 1 = \frac{(n!+n)-n}{t} + 1 = \frac{n!}{t} + 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdots \cancel{t} \cdots n}{\cancel{t}} + 1 \in \mathbb{N}$$

כלומר: נבחר $z = a^n b^{n!+n}$, ובהמשך נבחר $i = \dfrac{n!}{t} + 1 \in \mathbb{N}_0$, ונראה $z' \notin L$.