שגיאת האינטרפולציה

רוצים לדעת כמה האינטרפולציה קרובה לפונקציה המקורית.
עבור $n+1$ נקודות דגימה,

$$E\left(x\right)=f\left(x\right)-P_{n}\left(x\right)=\frac{f^{\left(n+1\right)}\left(\xi\right)}{\left(n+1\right)!}\left(x-x_{0}\right)\left(x-x_{1}\right)\ldots\left(x-x_{n}\right)\qquad\xi\in\left[x_{0},x_{1},\ldots x_{n}\right]$$

דוגמה

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}\qquad x=2$$

צריך לבחור נקודות. נבחר נקודות שאנחנו יודעים את השורש הריבועי שלהן:

$$\left(1,1\right)\qquad\left(4,2\right)\qquad\left(9,3\right)$$

$$P_{2}\left(x\right)=-\frac{1}{60}x^{2}+\frac{5}{12}x+\frac{3}{5}$$

$$P_{2}\left(x\right)\approx1.37$$

רוצים לחסום את השגיאה: $E\left(2\right)=?$. בשביל זה צריך לגזור את f 3 פעמים

$$f\left(x\right)=\sqrt{x}\qquad f'\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\qquad f''\left(x\right)=-\frac{1}{4\sqrt{x^{3}}}\qquad f'''\left(x\right)=\frac{3}{8\sqrt{x^{5}}}$$

$$E\left(2\right)=\frac{8\frac{3}{\sqrt{\xi^{5}}}}{3!}\left(2-1\right)\left(2-4\right)\left(2-9\right)\qquad\xi\in\left[1,9\right]$$

נרצה למקסם את $E\left(2\right)$, ובשביל זה נבחר $\xi=1$(כי זו פונקציה מונוטונית יורדת עבור ξ)

$$E\left(2\right)\leq\frac{\frac{3}{8}}{3!}\cdot14=\frac{7}{8}$$

בעיה

בחיים האמיתיים, בד"כ לא תהיה לנו את הפונקציה המקורית, ולכן אי אפש לגזור אותה.

פתרון

$$\xi \in [x_0, x_1, \dots x_n]$$

$$f[x_0, x_1, \dots x_m] = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

דוגמה

x_i	f_i
1	1
1.1	1.23368
1.2	1.55271
1.3	1.99372
1.4	2.61170

נבצע אינטרפולציה:

1	1				
		2.3368			
1.1	1.23368		4.2675		
		3.1903		6.105	
1.2	1.55271		6.099		7.65
		4.4101		9.165	
1.3	1.99372		8.8485		
		6.1798			
1.4	2.61170				

$$P_3(x) = 1+2.3368(x-1)+4.2675(x-1)(x-1.1)+6.105(x-1)(x-1.1)(x-1.2)$$

$$P(1.25) \approx 1.7557$$

$$P_4(x) = P_3(x) + 7.65(x-1)(x-1.1)(x-1.2)(x-1.3)$$

הנקודה הנוספת הזו היא מה שצריך כדי לתקן את P_3, כלומר

$$E(1.25) \leq 7.65(1.25-1)(1.25-1.1)(1.25-1.2)(1.25-1.3) \approx -7.1719 \cdot 10^{-4}$$

וזו השגיאה של $P_3(1.25)$.

שימו לב: קיבלנו שגיאה שלילית - אבל החסם לשגיאה היא תמיד בערך מוחלט.

אינטרפולציה במרחקים שווים

במידה ואנו יודעים שנקודות הדגימה הן במרחקים שווים, ניתן לבצע אינטרפולציה בצורה יותר יעילה.

x_i	f_i	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$
x_0	f_0	$\Delta^1 f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$
x_1	f_1	$\Delta^1 f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\vdots$
x_2	f_2	$\Delta^1 f_2$	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
x_n	f_n			

(הΔ הם הפרשים לא מחולקים)
ואז

$$h = x_{i+1} - x_i$$

$$x = x_0 + \mu_0 h$$

$$\Downarrow$$

$$\mu = \frac{x - x_0}{h}$$

$$P_n\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} \binom{\mu}{i} \Delta^i f_0$$

דוגמה

x_i	f_i	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$
-2	0.25				
		0.25			
-1	0.5		0.25		
		0.5		0.25	
0	1		0.5		0.25
		1		0.5	
1	2		1		
		2			
2	4				

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} - (-2)}{1} = 2.5$$

$$P_1\left(\frac{1}{2}\right) = \binom{\mu}{0} \cdot \Delta^0 f_0 + \binom{\mu}{\Delta^2 1} \Delta^1 f_0 = 1 \cdot 0.25 + 2.5 \cdot 0.25 = 0.875$$

הערה

$$\binom{\mu}{2} = \frac{\mu!}{2!\,(\mu-2)!} = \frac{\mu\,(\mu-1)}{2}$$

$$\binom{\mu}{3} = \frac{\mu!}{3!\,(\mu-3)!} = \frac{\mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)}{6}$$

אנחנו מחשבים את הבינום, לא את העצרת ־ מהעצרת אנחנו נפתרים די מהר.

המשך דוגמה

$$P_2\left(\frac{1}{2}\right) = P_1\left(\frac{1}{2}\right) + \binom{\mu}{2} \Delta^2 f_0 = 0.875 + \frac{2.5 \cdot 1.5}{2} \cdot 0.25 = 1.3438$$

וכו'

עקומות Spline - Cubi Spline

בהינתן $n+1$ נקודות דגימה של $g\,(x)$, נחלק ל־n קטעים:

$$[x_0, x_1]\,, [x_1, x_2]\,, \ldots [x_{n-1}, x_n]$$

ובכל קטע נבנה פולינום נפרד.
מצאו שהאיזון הכי טוב בין מהירות לדיוק הוא לשים בכל קטע כזה פולינום ממעלה שלישית.

נגדיר שהפולינום $g_i\,(X)$ הוא הפולינום ששייך לקטע $[x_i, x_{i+1}]$, והוא מהצורה

$$g_i\,(x) = a_i\,(x - x_i)^3 + b_i\,(x - x_i)^2 + c_i\,(x - x_i) + d_i$$

דרישות:

- הפונקציה שנבנה עוברת דרך נק' (x_i, y_i)
- בנקודות הדגימה: ערכי הפולינומים שווים(רציפות)
- בנקודת הדגימה: ערכי הנגזרות הראשונות שווים(שיפוע רציף)

- בנקודות הדגימה: ערכי הנגזרות השניות שווים(עקמומיות רציפה)

יש לנו

- $n+1$ משוואות מהצורה $\begin{cases} g_i\left(x_i\right)=y_i \\ g_{n-1}\left(x_n\right)=y_n \end{cases}$
- $3\left(n-1\right)$ משוואות מהצורה $\begin{cases} g_i\left(x_{i+1}\right)=g_{i+1}\left(x_{i+1}\right) \\ g_i'\left(x_{i+1}\right)=g_{i+1}'\left(x_{i+1}\right) \\ g_i''\left(x_{i+1}\right)=g_{i+1}''\left(x_{i+1}\right) \end{cases}$

יש לנו $4n$ נעלמים ב$4n-2$ משוואות - חסרות לנו 2 משוואות!
לכן נגדיר

$$s_i=g_i''\left(x_i\right)$$

$$s_n=g_{n-1}''\left(x_n\right)$$

$$h_i=x_{i+1}-x_i$$

ואז

$$a_i=\frac{s_{i+1}+s_i}{6h_i}$$

$$b_i=\frac{s_i}{2}$$

$$c_i=\frac{y_{i+1}-y_i}{h_i}-\frac{2h_is_i+h_is_i+1}{6}$$

$$d_i=y_i$$

והצלחנו לתרגם את המערכת ל$n+1$ נעלמים($s_0,\dots s_n$) - אבל עם $n-1$ נעלמים.
צריך לפתור את המערכת:

$$\begin{bmatrix} & \text{depends} & & & & & \\ h_0 & 2\left(h_0+h_1\right) & h_1 & & & & \\ & h_1 & 2\left(h_1+h_2\right) & h_2 & & & \\ & & h_2 & 2\left(h_2+h_3\right) & h_3 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_{n-2} & 2\left(h_{n-2}+h_{n-1}\right) & h_{n-1} \\ & \text{depends} & & & & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{n-1} \\ s_n \end{bmatrix}=$$

$$= 6 \cdot \begin{bmatrix} \text{depends} \\ \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} - \dfrac{y_1 - y_0}{h_0} \\ \dfrac{y_3 - y_2}{h_2} - \dfrac{y_2 - y_1}{h_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}} - \dfrac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ \text{depends} \end{bmatrix}$$

אבל עדיין צריך לייצר עוד 2 משואות! נצטרך לייצר אותן בצורה מלאכותית. יש כמה שיטות לכך.

1. Natural Spline: בוחרים $s_0 = s_n = 0$
2. מוסיפים 2 משוואות: $\begin{matrix} f'(x_0) = A \\ f'(x_n) = B \end{matrix}$ עבור A, B כלשהם.
3. Clamed spline - $\begin{matrix} s_0 = s_1 \\ s_n = s_{n-1} \end{matrix}$. משאיפים את הפונקציה לפרבולה בקצוות.

דוגמה

נרצה לבנות Natural Spline עבור

$$(-1,4), (0,1), (1,2), (2,6), (3,5)$$

יש 5 נקודות, ולכן צריכים מטריצה 3×3:

$$\begin{bmatrix} 2(1+1) & 1 & 0 \\ 1 & 2(1+1) & 1 \\ 0 & 1 & 2(1+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \dfrac{2-1}{1} - \dfrac{1-4}{1} \\ \dfrac{6-2}{1} - \dfrac{2-1}{1} \\ \dfrac{5-6}{1} - \dfrac{6-2}{1} \end{bmatrix}$$

מקבלים ש

$$s_1 = 4.607 \qquad s_2 = 5.57 \qquad s_3 = -8.89$$

ואז

$$a_0 = \frac{4.607}{6} = 0.768 \qquad b_0 = 0 \qquad c_0 = \frac{1-4}{1} - \frac{4.607}{6} = -3.768 \qquad d_0 = 4$$

וכן הלאה עבור שאר המקדמים.