מערך תרגול 3 מופשטת 3

הרחבת שדות (סוף סוף)

תזכורת 3.1 אם $F \subseteq L \subseteq K$ אז

$$[K : L][L : F] = [K : F]$$

תרגיל 3.2 תהי $F \subseteq K$ הרחבת שדות ויהיו $a, b \in K \backslash F$. נניח כי

$$[F(a) : F] = n, \quad [F(b) : F] = m$$

הראו כי

$$[F(a, b) : F] \leq nm$$

פתרון: הנתון ש $[F(a) : F] = n$ אומר לנו שהפולינום המינימלי של a מעל F(נסמן אותו $f_a \in F[x]$) הוא מדרגה n. אבל f_a הוא גם פולינום מעל $F(b)$ומאפס את a. לכן הפולינום המינימלי של a מעל $F(b)$ מחלק את f_a ולכן הוא מדרגה קטנה ממנו ולכן

$$[F(a, b) : F(b)] \leq n$$

לכן

$$[F(a, b) : F] = [F(a, b) : F(b)][F(b) : F] \leq nm$$

כנדרש

תרגיל 3.3 בהמשך לתרגיל הקודם. הראו כי כאשר $\gcd(n, m) = 1$ אז

$$[F(a, b) : F] = nm$$

פתרון: נשים לב ש

$$[F(a, b) : F] = [F(a, b) : F(a)][F(a) : F] = n[F(a, b) : F(a)]$$

$$[F(a, b) : F] = [F(a, b) : F(b)][F(b) : F] = m[F(a, b) : F(b)]$$

כלומר

$$n, m \mid [F(a, b) : F]$$

ולפי עובדה ידועה מתורת המספרים, כאשר n, m זרים זה אומר ש

$$nm \mid [F(a, b) : F]$$

דוגמא 3.4 $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3}) : \mathbb{Q}] = 6$

תרגיל 3.5 בהמשך לתרגילים הקודמים. תנו דוגמא למצב שבו אין שוויון.

פתרון: אפשר לקחת $a = \sqrt{2}, b = \sqrt[4]{2}$. אם רוצים להתאמץ ולמצוא מצב קצת יותר מעניין (כלומר מצב שבו לא מתקיים $F(a) \subseteq F(b)$ או להפך)
נבחר:

$$a = \sqrt[4]{2}, b = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

אתם כבר יודעים ש

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$$

ואז

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 4$$

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) : \mathbb{Q}] = 4$$

ו

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[4]{2})$$

הוא ממימד 8 מעל $\mathbb{Q}$.

תרגיל 3.6 אם כבר הזכרנו את $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ מה הפולינום המינימאלי של $\sqrt{2} + \sqrt{3}$?

פתרון: אנחנו כבר יודעים שהוא צריך להיות ממעלה 4. כדי למצוא אותו בדיוק אפשר לעשות את הטריק הבא: נסמן $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ ואז

$$x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

נעלה בריבוע ונקבל

$$x^2 - 2x\sqrt{2} + 2 = 3$$

כלומר

$$x^2 - 1 = 2x\sqrt{2}$$

שוב נעלה בריבוע

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 8x^2$$

כלומר הפולינום המינימלי הוא

$$x^4 - 10x^2 + 1$$

שאלה 3.7 תהי $F(a)$ הרחבה של F ונניח ש f הוא הפולינום המינימלי של a (מעל F). האם כל השורשים של f נמצאים ב $F(a)$?

תשובה: לפעמים כן (למשל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$) אבל זה לא תמיד קורה. למשל ניקח את $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. ברור ש $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subseteq \mathbb{R}$הפולינום המינימלי של $\sqrt[3]{2}$ הוא $x^3 - 2$ אבל שאר השורשים שלו הם מרוכבים ולכן לא נמצאים ב $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$.

הערה 3.8 המצבים שבהם כן כל השורשים נמצאים בהרחבה הם חשובים ונדבר עליהם בהרחבה בהמשך הקורס.

תרגיל 3.9 נתון כי הפולינום המינימלי של a (מעל $\mathbb{Q}$) הוא $x^3 - 6x^2 + 9x + 11$ מצאו את הפולינום המינימלי של $\frac{1}{a}$.

פתרון: נציב a בפולינום הנ"ל ונשים לב ש

$$a^3 - 6a^2 + 9a + 11 = 0$$

ולכן

$$1 - \frac{6}{a} + \frac{9}{a^2} + \frac{11}{a^3} = 0$$

כלומר הפולינום

$$11x^3 + 9x - 6x + 1$$

מאפס את $\frac{1}{a}$. אין לפולינום שורשים ב $\mathbb{Q}$ (אם b היה שורש אז $\frac{1}{b}$ שורש של הפולינום המקורי בסתירה לאי פריקות). ולכן הוא הפולינום המינימלי (צריך לחלק ב 11 כדי להפוך אותו למתוקן).

תרגיל 3.10 נסמן $\rho = e^{\frac{\pi i}{6}}$ כלומר שורש יחידה מסדר 12. הוכיחו כי

$$\mathbb{Q}(\rho) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$$

פתרון: נשים לב ש

$$\rho = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

אז ברור ש

$$\mathbb{Q}(\rho) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$$

מצד שני

$$\rho^3 = i$$

ולכן

$$i \in \mathbb{Q}(\rho)$$

ו

$$\sqrt{3} = 2(\rho - \frac{i}{2}) \in \mathbb{Q}(\rho)$$

ולכן יש שוויון.

תרגיל 3.11 בהמשך לתרגיל הקודם חשבו $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}]$

פתרון: קל לראות ש

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}] = 2$$

$$[\mathbb{Q}(i, \sqrt{3}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3}] = 2$$

ולכן

$$[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 4$$

תרגיל 3.12 בהמשך לתרגיל הקודם מצאו פולינום מינימלי של ρ.

פתרון: אנחנו יודעים ש $\rho^{12} = 1$ כלומר הוא שורש של $x^{12} - 1$. אבל זה כמובן פריק. נתחיל לפרק

$$(x^6 - 1)(x^6 + 1)$$

ρ שורש של $x^6 + 1$. לפי הנוסחא

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

נשים לב ש

$$x^6 + 1 = (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

ρ אינו שורש ש $x^2 + 1$ אז הוא צריך להיות שורש של

$$x^4 - x^2 + 1$$

זה פולינום אי פריק כי אנחנו כבר יודעים ש $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 4$. למעשה יש לנו דרך חדשה להוכיח שפולינום הוא אי פריק.

הערה 3.13 בהמשך הקורס תלמדו את הפירוק המלא של הפולינום $x^n - 1$.