פתרון תרגיל בית 3, גאומטריה אוקלידית ואנליטית, מתרגלת: זהבית צבי

1. מצאו ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים למטריצה $\begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$.

פתרון

נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} -7-\lambda & 8 \\ -6 & 7-\lambda \end{vmatrix}=-(7+\lambda)(7-\lambda)+48=\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=-1$$

כעת נחשב וקטורים עצמים:

עבור $\lambda_1=1$:

$$\begin{pmatrix} -8 & 8 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}\underset{\frac{1}{6}R_2\to R_2}{\overset{-\frac{1}{8}R_1\to R_1}{\to}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\overset{R_2+R_1\to R_2}{\to}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad y-x=0\Rightarrow y=x,\ x\neq 0$$

נבחר שרירותית $x=1$ ונקבל מיד $y=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=-1$:

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{\to}\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\overset{-\frac{1}{6}R_1\to R_1}{\to}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\quad x=\frac{4}{3}y,\ y\neq 0$$

נבחר שרירותית $y=3$ ונקבל מיד $x=4$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>סיכום</u>: עבור $\lambda_1=1$ הוקטור העצמי המתאים הוא $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=-1$ הוקטור העצמי המתאים הוא $v_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

פתרון

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & -7 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \underset{R_3+R_1\to R_3}{\overset{R_2-2R_4\to R_2}{=}} \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{R_1-5R_4\to R_1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 14 & 7 & -19 \\ 0 & 7 & 3 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 10 \\ 1 & -2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 14 & 7 & -19 \\ 7 & 3 & -10 \\ -3 & -1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1-2R_2\to R_1}{=} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & -10 \\ -3 & -1 & 10 \end{vmatrix} \underset{R_3+R_1\to R_3}{\overset{R_2-3R_1\to R_2}{=}} (-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & -13 \\ -3 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 7 & -13 \\ -3 & 11 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)(-1)(7\cdot 11-39)=38$$

בפעם הראשונה פיתחנו לפי עמודה ראשונה, בפעם השניה לפי עמודה שניה.

3. חשבו את הדטרמיננטה של המטריצה $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

<u>**פתרון**</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} \overset{R_2-2R_1\to R_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

נפתח לפי שורה שניה באיבר a_{23}: $=(-1)^{2+3}\cdot 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(4-1)=-6$

4. עבור המטריצות הבאות, מצאו את הערכים העצמיים והווקטורים העצמיים המתאימים:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2 & -4 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ד. $\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -5 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$

ו. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

<u>**פתרון**</u>

א. נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)-6=\lambda^2-3\lambda-4=0 \Rightarrow \lambda_1=4\,,\ \lambda_2=-1$$

כעת נמצא ו"ע:

<u>עבור</u> $\lambda_1=4$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \overset{R_2+R_1\to R_2}{\rightarrow} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{-\frac{1}{3}R_1\to R_1}{\rightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x-\frac{2}{3}y=0\,,\ y\neq 0$$

נבחר שרירותית $y=3$ ונקבל מיד $x=2$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

<u>עבור</u> $\lambda_2=-1$:

$$\begin{pmatrix}2&2\\3&3\end{pmatrix}\underset{\frac{1}{3}R_2\to R_2}{\overset{\frac{1}{2}R_1\to R_1}{\to}}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\overset{R_2-R_1\to}{\to}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\quad x+y=0$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=-1$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$.

ב. נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס : $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&2&3\\1&-1-\lambda&1\\0&-2&-3-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_1+\lambda R_2\to R_1}{=}\begin{vmatrix}0&2-\lambda-\lambda^2&3+\lambda\\1&-1-\lambda&1\\0&-2&-3-\lambda\end{vmatrix}$$

נפתח לפי עמודה ראשונה :

$$=1\cdot\underbrace{(-1)^{2+1}}_{-1}\begin{vmatrix}2-\lambda-\lambda^2&3+\lambda\\-2&-3-\lambda\end{vmatrix}=-\left[\left(2-\lambda-\lambda^2\right)(-3-\lambda)+2(3+\lambda)\right]=0$$

$$\Rightarrow\left(2-\lambda-\lambda^2\right)(3+\lambda)-2(3+\lambda)=0\Rightarrow-\lambda(1+\lambda)(3+\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=0\,,\lambda_2=-1,\lambda_3=-3$$

כעת נחשב ו"ע. נפתור $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו.

<u>עבור</u> $\lambda_1=0$:

$$\begin{pmatrix}0&2&3\\1&-1&1\\0&-2&-3\end{pmatrix}\overset{R_3+R_1\to R_3}{\to}\begin{pmatrix}0&2&3\\1&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\quad x-y+z=0\,,2y+3z=0\Rightarrow z=-\frac{2}{3}y\,,x=y-z=y+\frac{2}{3}y=\frac{5}{3}y$$

נבחר שרירותית $y=3$ ונקבל מיד $x=5\,,z=-2$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_1=\begin{pmatrix}5\\3\\-2\end{pmatrix}$.

<u>עבור</u> $\lambda_2=-1$:

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&0&1\\0&-2&-2\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{2}R_3\to R_3}{\overset{R_1-R_2\to R_1}{\to}}\begin{pmatrix}0&2&2\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\overset{R_1-2R_3\to R_1}{\to}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\quad x+z=0\,,y+z=0$$

נבחר שרירותית $z=-1$ ונקבל מיד $x=y=1$ וקיבלנו וקטור עצמי : $v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$.

<u>עבור</u> $\lambda_3=-3$:

$$\begin{pmatrix}3&2&3\\1&2&1\\0&-2&0\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{2}R_3\to R_3}{\overset{R_1-3R_2\to R_1}{\to}}\begin{pmatrix}0&-4&0\\1&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}\underset{R_2-2R_3\to R_2}{\overset{R_1+4R_3\to R_1}{\to}}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad x+z=0\,,y=0\,,0\neq z\in\mathbb{R}$$

נבחר שרירותית $z=-1$ ונקבל מיד $x=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$.

ג. נמצא את הפולינום האופיני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda & -4 & -3\\ -1 & -1-\lambda & 2\\ 0 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ -1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\left[-(2-\lambda)(1+\lambda)-4\right]$$

$$=(4-\lambda)\left(-2-2\lambda+\lambda+\lambda^2-4\right)=(4-\lambda)\left(\lambda^2-\lambda-6\right)=(4-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=4\,,\lambda_2=3\,,\lambda_3=-2$$

כעת נמצא ו״ע. נפתור $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו.

<u>עבור</u> $\lambda_1=4$:

$$\begin{pmatrix}-2 & -4 & -3\\ -1 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_2\to R_1}\begin{pmatrix}0 & 6 & -7\\ -1 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{6}R_1\to R_1}\begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{7}{6}\\ -1 & -5 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+5R_1\to R_2}\begin{pmatrix}0 & 1 & -\frac{7}{6}\\ -1 & 0 & -\frac{23}{6}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

נבחר שרירותית $z=6$ ונקבל מיד $x=-23\,,y=7$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}-23\\7\\6\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=3$:

$$\begin{pmatrix}-1 & -4 & -3\\ -1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}-1 & -4 & -3\\ 0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-5R_3\to R_2}\begin{pmatrix}-1 & -4 & -3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+3R_3\to R_1}\begin{pmatrix}-1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow -x=4y\,,z=0$$

נבחר שרירותית $y=-1$ ונקבל מיד $x=4$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3=-2$:

$$\begin{pmatrix}4 & -4 & -3\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+4R_2\to R_1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2-2R_3\to R_2]{R_1-5R_3\to R_1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}x=y\,,z=0$$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

ד. נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -5 & 3-\lambda & -1\\ -6 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}\overset{R_2-R_1\to R_2}{=}\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -2+\lambda & 2-\lambda & 0\\ -6 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ -6 & 6 & -4-\lambda\end{vmatrix}\underset{R_3-6R_1\to R_3}{\overset{R_2+R_1\to R_2}{=}}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1 & -1\\ -2-\lambda & 0 & -1\\ 12+6\lambda & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ 12+6\lambda & 2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)(-1)\left[-(2+\lambda)(2-\lambda)+12+6\lambda\right]$$

$$=(2-\lambda)(\lambda^2+6\lambda+8)=(2-\lambda)(\lambda+4)(\lambda+2)=0\Rightarrow\lambda_1=2\,,\lambda_2=-4\,,\lambda_3=-2$$

כעת נמצא ו"ע: נפתור $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו.

עבור $\lambda_1=2$

$$\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ -5 & 1 & -1\\ -6 & 6 & -6\end{pmatrix}\underset{-\frac{1}{6}R_3\to R_3}{\overset{R_2-R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}-5 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\overset{R_1+R_3\to R_1}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$-4x=0\Rightarrow x=0$$
$$x-y+z=0\Rightarrow y=z$$

נבחר שרירותית $z=1$ ונקבל מיד $y=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=-4$:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -5 & 7 & -1\\ -6 & 6 & 0\end{pmatrix}\underset{R_3+6R_1\to R_3}{\overset{R_2+5R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 12 & -6\\ 0 & 12 & -6\end{pmatrix}\overset{R_3-R_2\to R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 12 & -6\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{\frac{1}{12}R_2\leftrightarrow R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\overset{R_1-R_2\to R_1}{\longrightarrow}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad x=y=\frac{1}{2}z$$

נבחר שרירותית $z=2$ ונקבל מיד $x=y=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3=-2$: $\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-5&5&-1\\-6&6&-2\end{pmatrix}\underset{R_3-6R_1\to R_3}{\overset{R_2-5R_1\to R_2}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&0&4\\0&0&4\end{pmatrix}\overset{R_3-R_2\to R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}-x+y=0\,,\,z=0$

נבחר שרירותית $y=1$ ונקבל מיד $x=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

ו. נמצא את הפולינום האופייני ונשווה לאפס: $|A-\lambda I|=0$.
נפתח מיד לפי שורה ראשונה:

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\2&3-\lambda&3\\2&4&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3-\lambda&3\\4&2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda)-12\right]$$

$$=(1-\lambda)\left(\lambda^2-5\lambda-6\right)=(1-\lambda)(\lambda-6)(\lambda+1)=0\Rightarrow\lambda_1=1\,,\,\lambda_2=6\,,\,\lambda_3=-1$$

בצענו פיתוח לפי שורה ראשונה.
כעת נמצא ו"ע: נפתור $(A-\lambda I)v=0$ עבור כל λ_i שמצאנו.

עבור $\lambda_1=1$: $\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&3\\2&4&1\end{pmatrix}\overset{R_3-R_2\to R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&2&3\\0&2&-2\end{pmatrix}\overset{R_2-R_3\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&5\\0&2&-2\end{pmatrix}x=-\frac{5}{2}z\,,\,y=z$

נבחר שרירותית $z=2$ ונקבל מיד $x=-5\,,\,y=2$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_1=\begin{pmatrix}-5\\2\\2\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_2=6$:

$$\begin{pmatrix}-5&0&0\\2&-3&3\\2&4&-4\end{pmatrix}\underset{R_3-R_2\to R_3}{\overset{-\frac{1}{5}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&3\\0&7&-7\end{pmatrix}\overset{\frac{1}{7}R_3\to R_3}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-3&3\\0&1&-1\end{pmatrix}\overset{R_2-2R_1+3R_3\to R_2}{\longrightarrow}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}x=0\,,\,y=z$$

נבחר שרירותית $z=1$ ונקבל מיד $y=1$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

עבור $\lambda_3=-1$: $\begin{pmatrix}2&0&0\\2&4&3\\2&4&3\end{pmatrix}\underset{R_3-R_2\to R_3}{\overset{\frac{1}{2}R_1\to R_1}{\longrightarrow}}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&4&3\\0&0&0\end{pmatrix}x=0\,,\,y=-\frac{3}{4}z$

נבחר שרירותית $z=4$ ונקבל מיד $y=-3$ וקיבלנו וקטור עצמי: $v_3=\begin{pmatrix}0\\-3\\4\end{pmatrix}$.