הרצאה 12

פתרון של משוואות דיפרנציאליות רגילות (מערכת משוואות) בעזרת ההתמרה הלפלאס

§1. דוגמה יסודית

אנחנו מתכוונים למצוא את הפתרון של בעיה קושי הבאה

$$\left.\begin{aligned} & y'(x)+a\,y(x)=f(x)\,, \quad x>0 \text{ עבור} \\ & \lim_{x\to+0} y(x)=y_0 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

כאן $a=\text{const}$, $f(t)$ היא פונקציה-מקור.

משפט 1.1

תהי בבעיה (1.1) פונקציה $f(x)$ היא מקור רגיל. אז בעיה (1.1) בעלת הפתרון והוא יחיד ובנוסף הוא מקור.

הוכחה

ל-$x\geq 0$ נקבע:

$$y(x)=y_0\,e^{-ax}+\int_0^x f(t)\,e^{a(t-x)}\,dt\,, \quad x\geq 0 \qquad (1.2)$$

אז מתקיימות טענות הבאות:

(1) פונקציה $y(x)$ היא מוגדרת ורציפה באזור $x\geq 0$.
לאינטגרל ב-(1.2) קיים כי פונקציה $f(t)$ היא רציפה לכן פונקציה $y(x)$ מוגדרת עבור $x\geq 0$. חוץ מזה כיוון שניתן לרשום את ה-$y(x)$ בצורה הבאה:

$$y(x)=y_0\,e^{-ax}+e^{-ax}\int_0^x f(t)\,e^{at}\,dt \qquad (1.3)$$

אז מ-(1.3) נובע שפונקציה $y(x)$ בעלת נגזרת רציפה.

(2) פונקציה $y(x)$ היא פתרון של בעיה קושי (1.1)

גזירה מ-(1.3) נובע:

$$y'(x) = -a y_0 e^{-ax} - a e^{-ax} \int_0^x f(t) e^{at} dt + e^{-ax} f(x) e^{ax} =$$

$$= -a y(x) + f(x) \Rightarrow \boxed{y'(x) + a y(x) = f(x) \,, \ \forall x>0},$$

גם כן מ-(1.3) מקבלים:

$$\lim_{x\to+0} y(x) = y_0 \underbrace{\lim_{x\to+0} e^{-ax}}_{1} + \underbrace{\lim_{x\to+0} e^{-ax}}_{\to 1} \underbrace{\int_0^x f(t) e^{at} dt}_{\to 0} = y_0.$$

(3) פונקציה $y(x)$ היא רציפה והיא מקור (רציפה אם $x>0$)

נבדק:

$$y(x) = \begin{cases} 0 \,, & x<0 \text{ עבור} \\ y_0 e^{-ax} + \int_0^x f(t) e^{a(t-x)} f(t) dt \,, & x \geq 0 \text{ עבור} \end{cases}$$

ברור שפונקציה $f(x)$ היא רציפה כאשר $x>0$. נוכיח ש-$y(x)$ היא פונקציה-מקור. גם כן ברור שיש לנו רק לבדוק שקיימים $M>0$ ו-$S\in R$ כך שמתקיים אומדן:

$$|y(x)| \leq M e^{Sx} \qquad x \geq 0 \text{ עבור} \qquad (1.4)$$

לשם כך נזכיר ש-$f(x)$ הוא מקור. לכן:

$$|f(x)| \leq M_1 e^{\gamma x} \qquad x \geq 0 \text{ עבור}$$

וכאן $\gamma \in R$, $0 < M_1 = const$ והם קבועים אופיים. בלי הגבלת הכלליות תמיד ניתן להניח ש $\gamma + a > 0$. אז מקבלים עבור $x \geq 0$:

$$|y(x)| \leq |y_0| e^{-ax} + e^{-ax} \int_0^x |f(t)| e^{at} dt \leq |y_0| e^{-ax} +$$

$$+ e^{-ax} \cdot M_1 \int_0^x e^{\gamma t} \cdot e^{at} dt \leq |y_0| e^{-ax} + e^{-ax} M_1 \left. \frac{e^{(\gamma+a)t}}{\gamma+a} \right|_0^x \leq$$

$$\le |y_0|\, e^{-ax} + M_1 e^{-ax}\, \frac{e^{(\gamma+a)x}+1}{\gamma+a} =$$

$$= |y_0|\, e^{-ax} + \frac{M_1}{\gamma+a} \left\{ e^{\gamma x} + e^{-ax} \right\} \le$$

$$\le \left[|y_0| + \frac{2M_1}{\gamma+a} \right] e^{\max\{-a,\, \gamma\} x} \quad \Rightarrow \quad (1.4).$$

④ בעיה (1.1) בעלת את הפתרון יחיד

נניח שקיימים פתרונות y_1, y_2 ו- $y_1 \ne y_2$:

$$\left.\begin{aligned} & y_1' + a y_1 = f(x), \quad x \ge 0 \\ & \lim_{x\to+0} y_1(x) = y_0 \end{aligned}\right\}, \quad \left\{\begin{aligned} & y_2'(x) + a y_2(x) = f(x), \quad x \ge 0 \\ & \lim_{x\to+0} y_2(x) = y_0 \end{aligned}\right.$$

נקבע: $z(x) = y_2(x) - y_1(x)$, עבור $x \ge 0$

אז: $\left.\begin{aligned} & z'(x) + a z(x) = 0, \quad \text{עבור } x \ge 0 \\ & \lim_{x\to+0} z(x) = 0 \end{aligned}\right\}$

מכאן קל לראות שמתקיימות נוסחאות הבאות:

$$\left.\begin{aligned} & z(x) = C e^{-ax}, \quad x \ge 0 \\ & \lim_{x\to+0} z(x) = 0, \quad C = const \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \left. \begin{aligned} & z(x) \equiv 0 \\ & x \ge 0 \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x)$, עבור $x \ge 0$. ■

נניח כעת שאנחנו לא יודעים את הנוסחה (1.2) אך במקום זה לגבי בעיה (1.1) ידוע רק עובדות ④ - ① (תראה לעיל) אז בפרקים אלה ננסה למצוא מחדש פתרון של בעיה (1.1) בעזרת התמרת לפלס. תהי

$$y(x) \to Y(p), \quad f(x) \to F(x)$$

כיון שבשוויון $y'(x) + a y(x) = f(x), \; x \ge 0$

כל מחוברים הם מקורות אז ניתן להשתמש בהתמרה לפלס $\Leftarrow$

$$y'(x) \to p\,Y(p) - y(+0) = p\,Y(p) - y_0 \Rightarrow$$

$$(p\,Y(p) - y_0) + a\,Y(p) = F(p) \Rightarrow \left| \mathrm{Re}\, p > a! \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(p) = \frac{F(p)}{p+a} + \frac{y_0}{p+a}}$$

כעת נשתמש בנוסחאות שיצאו ומשפט בורל:

$$\left.\begin{array}{l} e^{-at} = e^{-at}\cdot 1 \rightarrow \dfrac{1}{p+a} \\ f * e^{-at} \longrightarrow \dfrac{1}{p+a}\cdot F(p) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$Y(p) = \widehat{f * e^{-at}}(p) + \widehat{y_0 e^{-at}}(p) =$$

$$= \widehat{f * e^{-at} + y_0 e^{-at}}\,(p) \Rightarrow$$

$$y(t) = y_0 e^{-a} + \left(f * e^{-a\xi}\right)(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(\xi) e^{-a(t-\xi)}\, d\xi \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = y_0 e^{-at} + \int_0^t f(\xi)\, e^{-a(t-\xi)}\, d\xi\ , \quad t>0}$$

ובכן קבלנו את הנוסחה (1.2). ■

לבסוף כאשר נפתור את המשוואות (מסדר יותר גבוה) ומערכות של משוואות דיפרנציאליות רגילות נשתמש בשיטה הנתונה לעיל.

2. פתרון של בעיה קושי למשוואה דיפרנציאלית רגילה לינארית מסדר 2 עם מקדמים קבועים

מטרה שלנו כאן הבאה: בעזרת התמרת לפלס למצוא פתרון של בעיה קושי (2.1-2.2)!

$$\begin{cases} a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t)\,, \quad t>0 & (2.1) \\ \lim\limits_{t\to+0} y(t) = y_0\ , \quad \lim\limits_{t\to+0} y'(t) = y_0' & (2.2) \end{cases}$$

כאן $f(t)$ היא פונקציה-מקור, a_0, a_1, a_2 הם מקדמים קבועים ממשיים. לפתן מתבססים בדרך כלל במשפט הבאה

משפט 2.1 תהי $f(t)$ היא פונקציה-מקור רציפה. אז בעיה (2.1) - (2.2) בעלת התכונות הבאות:

① פתרון $y(x)$ של בעיה (2.1-2.2) קיים

② פתרון $y(x)$ של בעיה (2.1-2.2) הוא יחיד

③ פתרון $y(x)$ של בעיה (2.1-2.2) הוא מקור.

כעת נתאר את הדרך לפתרון של בעיה (2.1-2.2).

I. עיקרון של סופרפוזיציה

נחפש פתרון של בעיה (2.1-2.2) מהצורת הסכום הבא:

$$y(t) = h(t) + z(t), \quad t>0 \text{ עבור} \qquad (2.3)$$

וכאן $x(t)$ ו- $y(t)$ הם פתרונות של בעיות קושי הבאות:

$$\begin{cases} a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = 0, & t>0 \\ \lim\limits_{t\to+0} x(t) = y_0, \quad \lim\limits_{t\to+0} x'(t) = y_0' \end{cases} \qquad (2.4)$$

$$\begin{cases} a_0 z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = f(t), & t>0 \\ \lim\limits_{t\to+0} z(t) = \lim\limits_{t\to+0} z'(t) = 0 \end{cases} \qquad (2.5)$$

II. פתרון של בעיה (2.4)

__הערה__ ברור שבעיה (2.4) ניתן לפתור בשיטות שונות מתורת המשוואות דיפרנציאליות. למשוואות מסדר 2 (כמו (2.4)) וגם למשוואות מסדר יותר גבוה בעיות אלה מביאות לפתרון של מערכת משוואות אלגבריות לינאריות. קיים לאורך דרך הנדון ידוע (חשבון מסובך). שיטת ההתמרה הלפלאס נותנת אפשרות לעבור את הקושי הזה.

כעת נעבור לפתרון של בעיה (2.4). קודם כל נשים לב שלפי משפט 2.1 (במקרה $(f(t)\equiv t, \forall t\in R)$ בעיה (2.4) בעלת הפתרון יחיד והוא מקור. תהי $x(t) \to X(p)$. למשוואה ב- (2.4) נשתמש בהתמרה לפלאס:

$$x(t) \to X(p) \Rightarrow x'(t) \to pX(p) - x(0) \Rightarrow$$

$$\boxed{x'(t) \to pX(p) - y_0} \Rightarrow$$

$$x''(t) \to p\left(p\mathrm{X}(p) - y_0\right) - x'(0) \Rightarrow$$

$$\boxed{x''(t) \to p^2\mathrm{X}(p) - p y_0 - y_0'}$$

ובכן:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &\to \mathrm{X}(p) \\ x'(t) &\to p\mathrm{X}(p) - y_0 \\ x''(t) &\to p^2\mathrm{X}(p) - p y_0 - y_0' \end{aligned}} \qquad (2.6)$$

כעת בעזרת הנוסחאות (2.6) מקבלים את התמונה של משוואה מ-(2.4):

$$a_0 x''(t) + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = 0 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a_0\left[p^2\mathrm{X}(p) - p y_0 - y_0'\right] + a_1\left[p\mathrm{X}(p) - y_0\right] + a_2\mathrm{X}(p) = 0$$

או אחרי כינוס איברים מוצאים:

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2)\mathrm{X}(p) - a_0(p y_0 + y_0') - a_1 y_0 = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathrm{X}(p) = \frac{a_0 y_0 p + a_0 y_0' + a_1 y_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}} \qquad (2.7)$$

ובכן תמונת הפתרון של בעיה (2.4) היא פונקציה רציונלית. מכנה של שבר ב-(2.7) היא פולינום אופייני. נשים לב שלמצוא"ת המקור שמתאים לתמונה $\mathrm{X}(p)$ לפי (2.7) ניתן להשתמש בשיטות שכבר ידוע. למשל פרוק לשברים פשוטים פלוס טבלת התמונות, תכונות כלליות שהתמרת הלפלאס פלוס טבלת התמונות ושיטת השאריות. בסופו של דבר מקור $x(t)$ שמתאים לתמונה $\mathrm{X}(p)$ ב-(2.7) הוא פתרון של בעיה (2.4).

<u>דוגמה</u> יש לפתור את הבעיה קושי הבאה:

$$\left.\begin{aligned} y''(x) + 2y' + 5y(x) &= 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

פתרון ראשון. תה' $y(x)\to Y(p)$ ⇐

$$y'(x)\to p\,Y(p)-y(0)=p\,Y(p)$$
$$y''(x)\to p\,(p\,Y(p))-y'(0)=p^2\,Y(p)-1$$

מכאן נובע שהתמונה של משוואה היא מהצורה:

$$y''(x)+2y'(x)+5y(x)=0\ \Rightarrow$$
$$(p^2\,Y(p)-1)+2\,(p\,Y(p))+5\,Y(p)=0\ \Rightarrow$$
$$(p^2+2p+5)\,Y(p)=1\ \Rightarrow$$
$$Y(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}=\frac{1}{(p+1)^2+2^2}\ \Rightarrow$$

$\sin x\to\frac{1}{p^2+1}\Rightarrow$ | משפט דמיון | $\Rightarrow \sin 2x\to\frac{1}{2}\,\frac{1}{(\frac{p}{2})^2+1}=$

$=\frac{2}{p^2+4}\Rightarrow\frac{\sin 2x}{2}\to\frac{1}{p^2+4}\Rightarrow$ | משפט הזזה | $\Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-2x}\cdot\frac{\sin 2x}{2}\to\frac{1}{(p+1)^2+4}$ | $\Rightarrow y(x)=\frac{e^{-x}\sin 2x}{2}$

פתרון שני באותו אופן מקבלים את התמונה של פתרון

$$Y(p)=\frac{1}{p^2+2p+5}$$

ומכאן במקום תכונות כלליות של התמרה לפלאס וטבלת התמונות נשתמש בשיטת השאריות. במקרה הנתון:

$$p^2+2p+5=0\ \Rightarrow\ p_{1,2}=-1\pm 2i\ \Rightarrow$$

$$Y(p)=2\,\mathrm{Re}\,\underset{p=-1+2i}{\mathrm{res}}\ \frac{e^{pt}}{p^2+2p+5}=2\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{p_1 t}}{2p_1+2}=$$

$$=2\,\mathrm{Re}\,\frac{e^{(-1+2i)t}}{2(p_1+1)}=e^{-x}\,\mathrm{Re}\,\frac{\cos 2x+i\sin 2x}{2i}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-x}\,\mathrm{Re}(-i)(\cos 2x+i\sin 2x)=\frac{e^{-x}\sin 2x}{2}\ ■$$

III פתרון של בעיה (2.5)

כעת בשבילנו יש למצוא את הפתרון של בעיה הבאה:

$$\left.\begin{aligned} & a_0 z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = f(t), \quad t>0 \\ & \lim_{t\to+0} z(t) = \lim_{t\to+0} z'(t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

פתרון ראשון

שיטה הבאה משתמשים רק במקרים כאשר קל למצוא את התמונה של מקור $f(t)$ (כלומר $f(t)\to F(p) = ?$). אם בעיה אחרונה ניתן לפתור בקלות אז בעזרת תנאים התח׳ מקבלים:

$$z(t)\to Z(p) \Rightarrow z'(t)\to p\,Z(p), \quad z''(t)\to p^2 Z(p)$$

ולכן

$$a_0 z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = 0 \to$$

$$a_0 p^2 Z(p) + a_1 p\, Z(p) + a_0 Z(p) = F(p) \Rightarrow$$

$$Z(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^2 + a_1 p + a_0} \qquad (2.6)$$

כיון שפונקציה $F(p)$ ידוע בצורה מפורשת אז נותר באופן כפשוט שמצאנו קודם למצוא את המקור $z(t)$ כך ש:

$$z(t) \to Z(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^2 + a_1 p + a_0}$$

דוגמה יש למצוא את הפתרון של בעיה קושי הבאה:

$$\begin{cases} z''(t) + 2z'(t) + z(t) = te^{-t} \\ z(0) = z'(0) = 0 \end{cases}$$

פתרון

קודם כל נבדוק שניתן לחשב את התמונה של מקור $f(t) = te^{-t}$:

$$1 \to \frac{1}{p} \Rightarrow \left| \begin{aligned} & f(t)\to F(p) \Rightarrow \\ & e^{-at}f(t) \to F(p+a) \end{aligned} \right| \Rightarrow e^{-t} \to \frac{1}{p+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{aligned} & f(t)\to F(p) \Rightarrow \\ & (-1)^n t^n f(t) \to F^{(n)}(p) \end{aligned} \right| \Rightarrow (-1)te^{-t} \to -\frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{te^{-t} \to \frac{1}{(p+1)^2}}$$

מכאן ביחד עם (2.8) מקבלים בקלות:

$$Z(p) = \frac{1}{p^2+2p+1} \cdot \frac{1}{(p+1)^2} = \frac{1}{(p+1)^4}$$

נמצא מקור של $Z(p)$. נשתמש בנוסחה שכבר ידוע!

$$t^n \to \frac{n!}{p^{n+1}} \Rightarrow t^n e^{-t} \to \frac{n!}{(p+1)^{n+1}} \Rightarrow n+1 := 4 \Rightarrow$$

$$n=3 \Rightarrow t^3 e^{-t} \to \frac{1}{(p+1)^4} \cdot 3! \Rightarrow \boxed{\frac{1}{3!} t^3 e^{-t} \to \frac{1}{(p+1)^3}}$$

זאת אומרת שפתרון של בעיה הוא מהצורה

$$\boxed{z(t) = \frac{1}{3!} t^3 e^{-t}} \quad \blacksquare$$

פתרון שני של בעיה (2.4)

שיטה הבאה משתמשים בדרך כלל במיקרים כאשר תמונה של מקור $f(t)$ $(\to ?=F(p))$ לא ניתן (או קשה) למצוא. ובכן אם

$$z(t) \to Z_1(p), \quad f(t) \to F(p)$$

אז פתרון של בעיה קושי (2.5):

$$\left.\begin{aligned} & a_0 z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = f(t), \quad t>0 \\ & \lim_{t\to+0} z(t) = \lim_{t\to+0} z'(t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

בעלי את התמונה הבאה (תרא (2.8) לעיל)

$$Z(p) = \frac{F(p)}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2} \qquad (2.8)$$

למציאת המקור $z(t)$ לפי תמונה שלו (2.8) נתבונן בבעיה עזר:

$$\left.\begin{aligned} & a_0 z_1'' + a_1 z_1' + a_2 z_1 = 1, \quad t>0 \\ & \lim_{t\to+0} z_1(t) = \lim_{t\to+0} z_1(t) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

ברור שבעיה (2.9) היא מקרה פרטי של בעיה (2.5). לכן לפי (2.8) מקבלים בקלות (אם $f(t)\equiv 1$ אז $F(p)=1/p$):

$$z_1(t) \to Z_1(p) \Rightarrow$$

$$Z_1(p) = \frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_2} \cdot \frac{1}{p} \Rightarrow$$

$$p\,Z_1(p) = \frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_2} \Rightarrow (2.8) \Rightarrow$$

$$Z(p) = \frac{F(p)}{a_0p^2+a_1p+a_2} = p\,Z_1(p)F(p) \Rightarrow$$

$$\boxed{Z(p) = p\,Z_1(p)\,F(p)} \qquad (2.10)$$

נשים לב שלמצוא מקור $z_1(t)$ כך שמתקיימת התאמה הבאה

$$z_1(t) \to Z_1(p) = \frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_2} \cdot \frac{1}{p}$$

ניתן בלי בעיות בשיטות ~~...~~ כלשהו שיצוע. לכן נוסחה (2.10) בעלת את המשמעות. כעת נתבונן בפונקציה $(z_1*f)(t)$.
(בכריכה הנתונה אנחנו מניח שמקור $z_1(t)$ כבר מצאנו)
לפי משפט בורל מקבלים!

$$(z_1*f)(t) \to Z_1(p)\,F(p)$$

ומכאן לפי נוסחה דיואמל (J. Duhamel) מקבלים:

$$\frac{d}{dt}(z_1*f)(t) \to p\,Z_1(p)\cdot F(p)$$

זאת אומרת שפתרון שחפשנו הוא מהצורה!

$$z(t) = \frac{d}{dt}(z_1*f)(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(\xi)\,z_1(t-\xi)\,d\xi\right] =$$

$$= f(t)\underbrace{z_1(0)}_{=0} + \int_0^t f(\xi)\,z_1'(t-\xi)\,d\xi \Rightarrow$$

$$\boxed{z(t) = \int_0^t f(\xi)\,z_1'(t-\xi)\,d\xi\,, \quad t>0} \qquad (2.11)$$

<u>הערה</u> לפי נוסחה (2.11) צ' למצוא $z_1'(t)$ במקום $z_1(t)$.

<u>דוגמא</u> נתבונן (להשוואה) בבעיה קודמת:

$$\left.\begin{aligned} & z''(t)+2z'(t)+z(t)=t\,e^{-t}\,, \quad t>0 \\ & z(0)=z'(0)=0 \end{aligned}\right\}$$

כעת נפתור את הבעיה זאת בשיטה שניה. במקרה הנתון פולינום אופייני הוא $(p+1)^2$ $\Leftarrow$

$$Z_1(p)=\frac{1}{(p+1)^2}\cdot\frac{1}{p}$$

נחפש פרוק לשברים פשוטים:

$$Z_1(p)=\frac{1}{p(p+1)^2}=\frac{A_1}{p}+\frac{A_2}{p+1}+\frac{A_3}{(p+1)^2}$$

נוסחאות הבאות ברורות למדי:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= p\,Z_1(p)\Big|_{p=0}=\frac{1}{(p+1)^2}\Big|_{p=0}=1 \\ A_3 &= (p+1)^2 Z_1(p)\Big|_{p=-1}=\frac{1}{p}\Big|_{p=-1}=-1 \\ A_2 &= \left[(p+1)^2 Z_1(p)\right]'\Big|_{p=-1}=-\frac{1}{p^2}\Big|_{p=-1}=-1 \end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$$Z_1(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}-\frac{1}{(p+1)^2}\Rightarrow\left|\begin{aligned} & e^{-t}\to\frac{1}{p+1} \\ & te^{-t}\to\frac{1}{(p+1)^2}\end{aligned}\right|$$

$$z_1(t)\to 1-e^{-t}-te^{-t}\Rightarrow$$

$$z_1'(t)=e^{-t}-e^{-t}+te^{-t}=\boxed{te^{-t}}$$

מכאן לפי נוסחה (2.11) ניתן למצוא את הפתרון שחפשנו:

$$z(t)=\int_0^t \xi e^{-\xi}\cdot z_1'(t-\xi)\,d\xi=\int_0^t \xi e^{-\xi}(t-\xi)e^{-(t-\xi)}d\xi=$$

$$=\int_0^t \xi e^{-\xi}(t-\xi)e^{-t}\cdot e^{\xi}d\xi=e^{-t}\int_0^t \xi(t-\xi)\,d\xi=e^{-t}\int_0^t(\xi t-\xi^2)\,d\xi$$

$$=e^{-t}\left(t\,\frac{\xi^2}{2}-\frac{\xi^3}{3}\right)\Big|_0^t=e^{-t}\left(\frac{t^3}{2}-\frac{t^3}{3}\right)=\boxed{\frac{1}{3!}t^3e^{-t}}\qquad\blacksquare$$

(IV) עיקרון של סופרפוזיציה: בצורה אחרונה

צריך לפתרון של בעיה קושי (2.1-2.2):

$$\begin{cases} a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t), \quad t>0 & (2.1) \\ \lim\limits_{t\to+0} y(t) = y_0, \quad \lim\limits_{t\to+0} y'(t) = y_0' & (2.2) \end{cases}$$

חיפשנו אותו בצורה:

$$y(t) = x(t) + z(t), \quad t>0 \text{ עבור}$$

כאן $x(t)$ ו- $z(t)$ הם פתרונות של בעיות הבאות:

$$\left.\begin{matrix} a_0 x''(t)+a_1x'(t)+a_2x(t)=0 \\ \lim\limits_{t\to+0} x(t) = y_0, \ \lim\limits_{t\to+0} x'(t) = y_0' \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} a_0 z''(t)+a_1z'(t)+a_2z(t)=f(t), \ t>0 \\ \lim\limits_{t\to+0} z(t) = \lim\limits_{t\to+0} z'(t) = 0 \end{matrix}\right.$$

פתרונות $x(t)$ ו- $z(t)$ מוצאים ע"ל. אחר כך למצוא פתרון $y(t)$ נותר לחבר פתרונות $x(t)$ ו- $z(t)$.

<u>**דוגמה**</u> יש לפתור את הבעיה קושי הבאה:

$$\begin{cases} y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t), \quad t>0 \text{ עבור} \\ y(0) = -1, \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

<u>**פתרון**</u>

נקבע: $y(t) = x(t) + z(t), \quad t>0$ עבור

וכאן:

$$\left.\begin{matrix} x''(t)+4x'(t)+4x(t)=0 \\ x(0)=-1, \ x'(0)=1 \end{matrix}\right\}, \quad \left\{\begin{matrix} z''(t)+4z'(t)+4z(t)=f(t) \\ z(0) = z'(0) = 0 \end{matrix}\right.$$

כאן $f(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)$ ו- $\varphi(0) := \lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)$.

להלן נבצע את האלגוריתם (IV) - (I) (ראה לעיל)

(II) תה' $x(t) \to X(p) \Leftarrow$

$$x'(t) \to pX(p) - x(0) = pX(p) + 1$$

$$x''(t) \to p[pX(p)+1] - x'(0) = p^2X(p) + p - 1$$

כעת נרשום את המשוואה ל- $X(p)$:

$$\left(p^2X(p)+p-1\right) + 4\left(pX(p)+1\right) + 4X(p) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(p^2+4p+4\right)X(p) + p-1+4 = 0 \Rightarrow$$

$$X(p) = -\frac{p+3}{(p+2)^2} = -\frac{(p+2)+1}{(p+2)^2} \Rightarrow$$

$$X(p) = -\frac{1}{p+2} - \frac{1}{(p+2)^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{x(t) = -e^{-2t} - te^{-2t}}$$

III

$$\begin{cases} z''(t) + 4z'(t) + 4z(t) = e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) \\ z(0) = z'(0) = 0 \end{cases}$$

במיקרה הנדון פולינום אופייני הוא מהצורה: $(p+2)^2$.

לכן תמונה של בעיה עזר:

$$\left.\begin{matrix} z_1''(t) + 4z_1'(t) + 4z_1(t) = 1 \\ z_1(0) = z_1'(0) = 0 \end{matrix}\right\}$$

היא מהצורה:

$$Z_1(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}$$

נחפש פרוק לשברים פשוטים הבא:

$$Z_1(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{(p+2)^2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} A = pZ_1(p)\Big|_{p=0} = \frac{1}{(p+2)^2}\Big|_{p=0} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} \\ C = (p+2)^2 Z_1(p)\Big|_{p=-2} = \frac{1}{p}\Big|_{p=-2} = -\frac{1}{2} \\ B = \left[(p+2)^2 Z_1(p)\right]'\Big|_{p=-2} = -\frac{1}{p^2} = -\frac{1}{4} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$Z_1(p) = \frac{1}{4p} - \frac{1}{4}\frac{1}{p+2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(p+2)^2} \Rightarrow$$

$$z_1(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}e^{-2t} - \frac{1}{2}te^{-2t} \Rightarrow$$

$$z_1'(t) = \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-2t} + te^{-2t} = \boxed{te^{-2t}}$$

<u>הערה</u> נשים לב שניתן לפשט חישובים בסעיף אחרון. למעשה להלן אנחנו נשתמש רק ב- $Z_1'(t)$ אך לא $Z_1(t)$. אם משוואה מקורית היא מהצורה:

$$\left.\begin{aligned} a_0 Z_1''(t) + a_1 Z_1'(t) + a_2 Z(t) &= 1 \\ Z_1(0) = Z_1'(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

אז (תרגיל לעיל)

$$Z_1(p) = \frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_2} \cdot \frac{1}{p} \Longrightarrow$$

$$p\,Z_1(p) = \frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_2}$$

ולכן בשבילנו יש למצוא מקור שמתאים לפונקציה

$$\frac{1}{a_0p^2+a_1p+a_2}$$

וכאן $(a_0p^2+a_1p+a_2)$ הוא פולינום אופייני שמשוואה מקורית. למשל בדוגמה הנתונה:

$$p\,Z_1(p) = \frac{1}{(p+2)^2} \Longrightarrow \boxed{Z_1'(t) = t\,e^{-2t}}$$

ותוצאה אחרונה קבלנו בלי מציאה את המקור $Z_1(t)$ בצורה מפורשת (תרגיל לעיל)

כעת ניתן למצוא את הפתרון $Z(t)$:

$$Z(t) = \int_0^t f(\xi)\, Z_1'(t-\xi)\,d\xi = \left| \begin{aligned} f(\xi) &= e^{-2\xi}(\cos\xi + 2\sin\xi) \\ Z_1'(t-\xi) &= (t-\xi)\,e^{-2(t-\xi)} \end{aligned} \right| =$$

$$= \int_0^t e^{-2\xi}(\cos\xi + 2\sin\xi)(t-\xi)\,e^{-2(t-\xi)}\,d\xi =$$

$$= \int_0^t e^{-2\xi}(\cos\xi + 2\sin\xi)(t-\xi)\,e^{-2t}\cdot e^{2\xi}\,d\xi =$$

$$= e^{-2t}\int_0^t (t-\xi)(\cos\xi + 2\sin\xi)\,d\xi = e^{-2t}\int_0^t (t-\xi)\,d(\sin\xi - 2\cos\xi) =$$

$$= e^{-2t}\left\{(t-\xi)(\sin\xi-2\cos\xi)\Big|_0^t+\int_0^t(\sin\xi-2\cos\xi)d\xi\right\}$$

$$= e^{-2t}\left\{-t(0-2)+\left[-\cos\xi-2\sin\xi\right]\Big|_0^t\right\} =$$

$$= e^{-2t}\left\{2t+(-\cos t-2\sin t+1)\right\} = e^{-2t}\left\{2t-\cos t-2\sin t+1\right\}$$

$\mapsto$

$$Z(t) = e^{-2t}\left\{2t-\cos t-2\sin t+1\right\}$$

$$X(t) = -e^{-2t}-te^{-2t} \qquad \Rightarrow$$

$$y(t) = X(t)+Z(t) = e^{-2t}\left\{-1-t+2t-\cos t-2\sin t+1\right\} =$$

$$= e^{-2t}\left\{t-\cos t-2\sin t\right\} \mapsto$$

תשובה:

$$\boxed{y(t) = e^{-2t}(t-\cos t-2\sin t)}$$

§3 פישוטים

A נתבונן בבעיה קושי הבאה:

$$\left.\begin{aligned} &a_0 y''(t)+a_1 y'(t)+a_2 y(t) = f(t) \\ &\lim_{t\to x_0+0} y(t) = y_0, \quad \lim_{t\to x_0+0} y'(t) = y_0' \end{aligned}\right\} \qquad (3.1)$$

בעיה כזאת מתלכדת עם בעיה שלמדנו קודם אם $x_0=0$
לשם כך לפתור את הבעיה (3.1) יש לבצע את ההחלפת
המשתנה: $t=x_0+x$ ואחר-כך אנחנו חוזרים למקרה שלמדנו
לעיל.

דוגמה יש לפתור את בעיה קושי הבאה

$$\begin{cases} y''(t)+y'(t) = e^t, & t\geq 1 \quad \text{עבור} \\ y(1)=1, \quad y'(1)=2 \end{cases}$$

פתרון

תהי $t=x+1 \Leftarrow \tilde{y}(x):=y(x+1) \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{y}''(x)+\tilde{y}'(x)=e^{t}\Big|_{t=x+1}=e^{x+1}=e\cdot e^{x}\\
&\tilde{y}(0)=y(x+1)\Big|_{x=0}=y(1)=1\\
&\tilde{y}'(0)=y'(x+1)\Big|_{x=0}=y'(1)=2
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

ובכן בצורה סופית בעיה חדשה היא מהצורה:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{y}''(x)+\tilde{y}'=e^{x+1}\quad,\ x>0\ \text{עבור}\\
&\tilde{y}(0)=1,\ \tilde{y}'(0)=2
\end{aligned}\right\}$$

כיון שבעיה זאת פשוטה מאוד לפתור אותה בהתמרה לפלאס ישירה (בלי עיקרון של סופרפוזיציה). תהי:

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde{y}(x)\rightarrow Y(p)\ \Rightarrow\\
&\tilde{y}'(x)\rightarrow p\,Y(p)-\tilde{y}(0)=\boxed{p\,Y(p)-1}\\
&\tilde{y}''(x)\rightarrow p\,[p\,Y(p)-1]-\tilde{y}'(0)=\boxed{p^2\,Y(p)-p-2}
\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

אז משוואה לתמונה $Y(p)$ היא מהצורה:

$$[p^2\,Y(p)-p-2]+[p\,Y(p)-1]=\frac{e}{p-1}\ \Rightarrow$$

$$p^2\,Y(p)-p-2+p\,Y(p)-1=\frac{e}{p-1}\ \Rightarrow$$

$$(p^2+p)\,Y(p)=\frac{e}{p-1}+(p+3)\ \Rightarrow$$

$$Y(p)=\frac{e}{p(p-1)(p+1)}+\frac{p+3}{p(p+1)}=\left|\begin{aligned}&p+3=(p+1)+2\ \Rightarrow\\&\frac{p+3}{p(p+1)}=\frac{1}{p}+\frac{2}{p(p+1)}\end{aligned}\right|=$$

$$=\frac{e}{p(p-1)(p+1)}+\frac{1}{p}+\frac{2}{p(p+1)}=\left|\frac{1}{p(p+1)}=\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right|=$$

$$=\frac{e}{p(p-1)(p+1)}+\frac{1}{p}+\frac{2}{p}-\frac{2}{p+1}=\frac{e}{p(p-1)(p+1)}+\frac{3}{p}-\frac{2}{p+1}$$

כעת נמצא מקורים בפירוק הבא!

$$\frac{1}{(p-1)\,p\,(p+1)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1} := F(p) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}
A &= (p-1)F(p)\Big|_{p=1} = \frac{1}{p(p+1)}\Big|_{p=1} = \frac{1}{2}\\
B &= p\,F(p)\Big|_{p=0} = \frac{1}{(p-1)(p+1)}\Big|_{p=0} = -1\\
C &= (p+1)F(p)\Big|_{p=-1} = \frac{1}{p(p-1)}\Big|_{p=-1} = \frac{1}{2}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{(p-1)\,p\,(p+1)} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2(p+1)} \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{e}{2(p-1)} - \frac{e}{p} + \frac{e}{2(p+1)} + \frac{3}{p} - \frac{2}{p+1} \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{e}{2}\,\frac{1}{p-1} + (3-e)\frac{1}{p} + \left(\frac{e}{2} - 2\right)\frac{1}{p+1} \Rightarrow$$

$$\tilde{y}(x) = \frac{e}{2}e^{x} + (3-e) + \left(\frac{e}{2} - 2\right)e^{-x} \Rightarrow \quad x := t-1 \Rightarrow$$

$$y(t) = \frac{e}{2}e^{t-1} + (3-e) + \left(\frac{e}{2} - 2\right)e^{-t+1} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}e^{t} + (3-e) + \left(\frac{e^2}{2} - 2e\right)e^{-t}}$$

B נתבונן שוב בבעיה יסודית מ- §2!

$$\begin{cases} a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) = f(t)\,, \quad t>0 \text{ עבור כל} & (3.2)\\ y(0) = y_0\,, \quad y'(0) = y_0' & (3.3)\end{cases}$$

להלן נוכיח שאפשר כך לפתור את הבעיה כזאת מספיק לפתור את הבעיה דומה אך עם תנאים התח' שווים לאפס:

$$\begin{cases} a_0 z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = f_1(t)\,, \quad t>0 \text{ עבור כל} & (3.4)\\ z(0) = z'(0) = 0 & (3.5)\end{cases}$$

למעשה, אם $|y_0|+|y_0'|\neq 0$ אז נגדיר:

$$z(t) := y(t) - y_0 - y_0' t \Rightarrow$$

$$y(t) = z(t) + y_0 + y_0' t \Rightarrow$$

לתנאים $y(0)=y_0\,,\ y'(0)=y_0'$ כעת מתאים תנאים $z(0)=0$
$z'(0)=0$. נציב ההצבה זאת במשוואה ונקבל

$$f(t) = a_0 y''(t) + a_1 y'(t) + a_2 y(t) =$$

$$= a_0 z''(t) + a_1 (z'(t) + y_0') + a_2 (z(t) + y_0 + y_0' t) =$$

$$= a_0 z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) + a_2 y_0' t + a_2 y_0 + a_1 y_0' \Rightarrow$$

למציאת $z(t)$ נקבל בעיה קושי הבאה:

$$\left.\begin{aligned} & a_0 z''(t) + a_1 z'(t) + a_2 z(t) = f_1(t) \quad t>0 \text{ עבור} \\ & z(0) = z'(0) = 0 \\ & f_1(t) = f(t) - a_2 y_0' t - a_2 y_0 - a_1 y_0' \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

דרך לפתרון של בעיה קושי (3.6) כבר ידוע (ראה §2)

<u>דוגמה</u> יש לפתור את הבעיה קושי הבאה:

$$\left.\begin{aligned} & y''(x) + y(x) = \sin x\,, \quad x>0 \text{ עבור} \\ & y(0) = 0\,, \quad y'(0) = -1/2 \end{aligned}\right\}$$

<u>פתרון</u>

נגדיר: $z(0)=z'(0)=0\,,\quad y(x) = z(x) + Ax + B \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} & 0 = y(0) = z(0) + B = B \Rightarrow \boxed{B=0} \\ & -\frac{1}{2} = y'(0) = z'(0) + A = A \Rightarrow \boxed{A=-\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = z(x) - \frac{x}{2}\,, \quad z(0) = z'(0) = 0}$$

כעת נציב את ההצבה כאן במשוואה:

$$z''(x) + \left(z(x) - \frac{x}{2}\right) = y''(x) + y(x) = \sin x \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} & z''(x) + z(x) = \frac{x}{2} + \sin x\,, \quad x>0 \text{ עבור} \\ & z(0) = z'(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

יהי $Z_1(x)$ הוא פתרון של בעיה עזר

$$\left.\begin{array}{l} Z_1''(x)+Z_1(x)=1, \quad x>0 \quad \text{עבור} \\ Z_1(0)=Z_1'(0)=0 \end{array}\right\} \qquad (3.8)$$

אם ידוע כבר (תרגיל 12) שפתרון של בעיה (3.7) הוא מהצורה!

$$z(x)=\int_0^x\left(\frac{\xi}{2}+\sin\xi\right)Z_1'(x-\xi)\,d\xi, \quad x>0 \qquad (3.9)$$

נמצא $Z_1'(t)$. תהי $Z_1(t)\to Z_1(p)$ $\Leftarrow$ (תרגיל 12)!

$$Z_1(p)=\frac{1}{p(p^2+1)} \quad \Rightarrow$$

$$Z_1'(x)\to p\,Z_1(p)-\underbrace{Z_1(0)}_{=0}=p\,Z_1(p)=\frac{1}{p^2+1} \quad \Rightarrow$$

$$Z_1'(x)\longrightarrow\frac{1}{p^2+1} \Rightarrow \boxed{Z_1'(x)=\sin x} \Rightarrow$$

$$Z(x)=\int_0^x\left(\frac{\xi}{2}+\sin\xi\right)\sin(x-\xi)\,d\xi=\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^x\xi\sin(x-\xi)\,d\xi}_{a}+$$

$$+\underbrace{\int_0^x\sin\xi\cdot\sin(x-\xi)\,d\xi}_{b} \Rightarrow$$

a) $$\frac{1}{2}\int_0^x\xi\sin(x-\xi)\,d\xi=\frac{1}{2}\int_0^x\xi\,d\cos(x-\xi)=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\xi\cos(x-\xi)\Big|_0^x-\int_0^x\cos(x-\xi)\,d\xi\right\}=\frac{1}{2}\{x\cos 0-0+$$

$$+\sin(x-\xi)\Big|_0^x\}=\frac{1}{2}\{x-\sin x\}=\boxed{\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}}$$

b) $$\int_0^x\sin\xi\cdot\sin(x-\xi)\,d\xi=$$

$$=\int_0^x\sin\xi\cdot[\sin x\cdot\cos\xi-\cos x\cdot\sin\xi]\,d\xi=$$

$$=\frac{\sin x}{2}\int_0^x\sin 2\xi\,d\xi-\cos x\int_0^x\sin^2\xi\,d\xi=$$

$$= \frac{\sin x}{2}\left[-\frac{\cos 2\xi}{2}\Big|_0^x\right] - \cos x \int_0^x \frac{1-\cos 2\xi}{2}\, d\xi =$$

$$= \frac{\sin x}{2}\left[-\frac{\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\right] - \frac{x\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2}\int_0^x \cos 2\xi\, d\xi =$$

$$= \frac{\sin x}{4} - \frac{\sin x\cos 2x}{4} - \frac{x\cos x}{2} + \frac{\cos x}{2}\,\frac{\sin 2\xi}{2}\Big|_0^x =$$

$$= \frac{\sin x}{4} - \frac{\sin x \cos 2x}{4} - \frac{x\cos x}{2} + \frac{\cos x\cdot \sin 2x}{4} =$$

$$= -\frac{x\cos x}{2} + \frac{\sin x}{4} + \frac{\sin 2x\cos x - \cos 2x \sin x}{4} =$$

$$= -\frac{x\cos x}{2}+\frac{\sin x}{4}+\frac{\sin(2x-x)}{4} = -\frac{x\cos x}{2}+\frac{\sin x}{2} \Rightarrow$$

$$(a)+(b) = \frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}-\frac{x\cos x}{2}+\frac{\sin x}{2} = \frac{x}{2}-\frac{x\cos x}{2}$$

ובכן:

$$z(x) = (a)+(b) = \frac{x}{2}-\frac{x\cos x}{2} \Rightarrow$$

$$y(x) = z(x)-\frac{x}{2} = \frac{x}{2}-\frac{x\cos x}{2}-\frac{x}{2} = -\frac{x\cos x}{2} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{x\cos x}{2}}$$ ■

<u>דוגמה</u> יש לפתור את הבעיה קושי הבאה:

$$\begin{cases} y''(t)+2y'(t)+y(t) = t + e^{-t}\dfrac{1}{(t+1)^2}, & t>0 \text{ עבור} \\ y(0)=-2, \quad y'(0)=1 \end{cases}$$

<u>פתרון</u> נקבע:

$$y(t) = z(t) + At + B, \quad z(0)=z'(0)=0$$

את מקדמים בקלות!

$$-2 = y(0) = z(0)+B = B \Rightarrow \boxed{B=-2}$$

$$1 = y'(0) = z'(0)+A = A \Rightarrow \boxed{A=1} \Rightarrow$$

$$\boxed{y(t) = z(t)+t-2}$$

כעת נציב את ההחלפה זאת במשוואה מקורית:

$$z''(t)+2\left[z'(t)+1\right]+\left[z(t)+t-2\right]=$$

$$=z''(t)+2z'(t)+z(t)+t=y''(t)+2y'(t)+y(t)=$$

$$=t+e^{-t}\frac{1}{(t+1)^2}\quad\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned}&z''(t)+2z'(t)+z(t)=e^{-t}\frac{1}{(t+1)^2},\quad t\geq 0 \text{ עבור}\\&z(0)=z'(0)=0\end{aligned}\right.$$

נתבונן בבעיה עזר:

$$\left\{\begin{aligned}&z_1''(t)+2z_1'(t)+z_1(t)=1\\&z_1(0)=z_1'(0)=0\end{aligned}\right.$$

נסמן בתמונה של $z_1(t)\leftarrow Z_1(p)$ $\Leftarrow$

$$Z_1(p)=\frac{1}{(p+1)^2}\cdot\frac{1}{p}\Rightarrow pZ_1(p)=\frac{1}{(p+1)^2}\Rightarrow$$

$$\boxed{z_1'(t)=te^{-t}}\Rightarrow$$

$$z(t)=\int_0^t\frac{e^{-\xi}}{(\xi+1)^2}(t-\xi)e^{-(t-\xi)}d\xi=$$

$$=\int_0^t\frac{e^{-\xi}}{(\xi+1)^2}(t-\xi)e^{-t}\cdot e^{\xi}d\xi=e^{-t}\int_0^t\frac{t-\xi}{(\xi+1)^2}d\xi=$$

$$=-e^{-t}\int_0^t(t-\xi)\,d(\xi+1)^{-1}=-e^{-t}\left\{\frac{t-\xi}{\xi+1}\Big|_0^t+\int_0^t\frac{d\xi}{\xi+1}\right\}=$$

$$=-e^{-t}\left\{-t+\ln(\xi+1)\Big|_0^t\right\}=-e^{-t}\left\{-t+\ln(t+1)\right\}\Rightarrow$$

$$z(t)=te^{-t}-e^{-t}\ln(t+1)\Rightarrow$$

$$y(t)=z(t)+t-2=te^{-t}-e^{-t}\ln(t+1)+t-2\Rightarrow$$

$$\boxed{y(t)=e^{-t}\left[t-\ln(t+1)\right]+t-2}$$

§4 פתרון של מערכות משוואות דיפרנציאליות לינאריות רגילות

יהי $f_1(t), f_2(t)$ הן פונקציות מקורות רציפות. נתבונן בבעיה קושי הבאה:

$$\left.\begin{aligned} & y_1'(t)+a_{11}y_1(t)+a_{12}y_2(t)=f_1(t) \\ & y_2'(t)+a_{21}y_1(t)+a_{22}y_2(t)=f_2(t) \\ & y_1(0)=y_2(0)=0 \end{aligned}\right\}, \quad t>0 \qquad (4.1)$$

(כאן ולהבא משתמשים בסימון: $\varphi(0)=\lim\limits_{t\to+0}\varphi(t)$)

נסמן התמונות של מקורות $y_1(t), y_2(t)$:

$$y_1(t)\to Y_1(p), \quad y_2(t)\to Y_2(p)$$

כיון שמתקיימות נוסחאות הבאות:

$$\left.\begin{aligned} & y_1'(t)\to p\,Y_1(p)-y_1(0)=p\,Y_1(p) \\ & y_2'(t)\to p\,Y_2(p)-y_2(0)=p\,Y_2(p) \end{aligned}\right\}$$

אז קל לראות שתמונות $Y_1(p), Y_2(p)$ מתקיימות למערכת משוואות אלגבריות לינארית הבאה:

$$\left.\begin{aligned} & p\,Y_1(p)+a_{11}Y_1(p)+a_{12}Y_2(p)=F_1(p), \quad f_1(t)\to F_1(p) \\ & p\,Y_2(p)+a_{21}Y_1(p)+a_{22}Y_2(p)=F_2(p), \quad f_2(t)\to F_2(p) \end{aligned}\right\}$$

אחרי כינוס איברים מקבלים

$$\left.\begin{aligned} & (p+a_{11})Y_1(p)+a_{12}Y_2(p)=F_1(p) \\ & a_{21}Y_1(p)+(p+a_{22})Y_2(p)=F_2(p) \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

נסמן ב- $\Delta(p)$ את הדטרמיננטה של מערכת (4.2):

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & p+a_{22} \end{vmatrix}$$

אז לפי כלל קרמר מוצאים

$$Y_1(p)=\frac{1}{\Delta(p)}\begin{vmatrix} F_1(p) & a_{12} \\ F_2(p) & a_{22}+p \end{vmatrix}=\frac{(a_{22}+p)F_1(p)-a_{12}F_2(p)}{\Delta(p)}, \qquad (4.3)$$

$$Y_2(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} p+a_{11} & F_1(p) \\ a_{21} & F_2(p) \end{vmatrix} = \frac{(p+a_{11})F_2(p) - a_{21}F_1(p)}{\Delta(p)} \quad (4.3)$$

ברור שנוכל למצוא את המקורות $y_1(t), y_2(t)$ שמתאימים לתמונות $Y_1(p), Y_2(p)$ (בהתאמה) ואנחנו נקבל את הפתרון $\{y_1(x), y_2(x)\}$ של בעיה קושי (4.1).

<u>דוגמה</u> יש לפתור את הבעיה קושי הבאה:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -7x + y + 5 \\ y'(t) &= -2x - 5y - 37t \\ x(0) &= y(0) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (\text{כאן } t>0)$$

<u>פתרון</u> נרשום הבעיה זאת בצורה תקנית:

$$\left.\begin{aligned} x'(t) + 7x(t) - y(t) &= 5 \\ y'(t) + 2x(t) + 5y(t) &= 37t \\ x(0) = y(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

נה' $x(t) \to X(p), \quad y(t) \to Y(p) \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &\to pX(p) - x(0) = pX(p) \\ y'(t) &\to pY(p) - y(0) = pY(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ברור שאם נשתמש בהתמרה לפלאס למערכת (4.4) אז נקבל את המערכת הבאה:

$$\left.\begin{aligned} pX(p) + 7X(p) - Y(p) &= \frac{5}{p} \\ pY(p) + 2X(p) + 5Y(p) &= -\frac{37}{p^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

אחרי כינוס איברים מקבלים:

$$\left.\begin{aligned} (p+7)X(p) - Y(p) &= \frac{5}{p} \\ 2X(p) + (p+5)Y(p) &= -\frac{37}{p^2} \end{aligned}\right\}$$

לפתור את המערכת אחרונה. נה' $\Delta(p)$ היא דטרמיננטה שלה אז:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p+7 & -1 \\ 2 & p+5 \end{vmatrix} = (p+7)(p+5) + 2 = p^2 + 12p + 37$$

אז בגורה סופית:

$$\Delta(p)=\begin{vmatrix} p+7 & -1 \\ 2 & p+5 \end{vmatrix} = p^2+12p+37$$

מכאן לפי כלל קרמר מקבלים:

$$\mathcal{X}(p)=\frac{1}{\Delta(p)}\begin{vmatrix} 5/p & -1 \\ -37/p^2 & p+5 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(p)}\left[\frac{5}{p}(p+5)-\frac{37}{p^2}\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{X}(p)=\frac{5p^2+25p-37}{p^2(p^2+12p+37)},$$

$$\mathcal{Y}(p)=\frac{1}{\Delta(p)}\begin{vmatrix} p+7 & 5/p \\ 2 & -37/p^2 \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(p)}\left[-\frac{37(p+7)}{p^2}-\frac{10}{p}\right] \Rightarrow$$

$$\mathcal{Y}(p)=\frac{-47p-259}{p^2(p^2+12p+37)}$$

כאן מוצאים פירוק של $\mathcal{X}(p), \mathcal{Y}(p)$ לשברים פשוטים:

$$\mathcal{X}(p)=\frac{5p^2+25p-37}{p^2(p^2+12p+37)}=\frac{A_1}{p}+\frac{B_1}{p^2}+\frac{C_1p+D_1}{p^2+12p+37} \Rightarrow$$

$$B_1 = p^2\mathcal{X}(p)\Big|_{p=0} = \frac{5p^2+25p-37}{p^2+12p+37}\Big|_{p=0} = \boxed{-1}$$

$$A_1 = \left(p^2\mathcal{X}(p)\right)'\Big|_{p=0} = \frac{(10p+25)(p^2+12p+37)-(2p+12)(5p^2+25p-37)}{(p^2+12p+37)^2}\Big|_{p=0} =$$

$$= \frac{25\cdot 37+12\cdot 37}{37^2} = \frac{25+12}{37} = \boxed{1}$$

$$C_1 = \lim_{|p|\to\infty} p\,\mathcal{X}(p) = \lim_{|p|\to\infty}\frac{5p^2+25p-37}{p(p^2+12p+37)} = 0 = A_1 + C_1 \Rightarrow$$

$$C_1 = -A_1 = -1$$

$$\mathcal{X}(1)=\frac{5p^2+25p-37}{p^2(p^2+12p+37)} = \frac{5+25-37}{1(1+12+37)} = 1-1+\frac{-1+D_1}{1+12+37} \Rightarrow$$

$$-7=-1+D_1 \Rightarrow \boxed{D_1=-6} \Rightarrow$$

$$\boxed{\mathcal{X}(p)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1}}$$

באופן דומה לגמרי מוצאים:

$$Y(p)=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{p+5}{(p+6)^2+1}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned}X(p)&=\frac{1}{p}-\frac{1}{p^2}-\frac{p+6}{(p+6)^2+1}\\ Y(p)&=\frac{1}{p}-\frac{7}{p^2}-\frac{(p+6)}{(p+6)^2+1}+\frac{1}{(p+6)^2+1}\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

תשובה:

$$\boxed{\left.\begin{aligned}x(t)&=1-t-e^{-6t}\cos t\\ y(t)&=1-7t-e^{-6t}(\cos t+\sin t)\end{aligned}\right\}}$$

קל לראות ששיטה שלמדנו עליה אי אפשר להשתמש במציאה של פתרון של בעיה (4.1) אם אנחנו לא יכולים לחשב את התמונות $F_1(p), F_2(p)$ של מקורות $f_1(t), f_2(t)$. להלן נותנים את השיטה אחרת לפתרון של בעיה (4.1) שבה לא משתמשת בתמונות $F_1(p), F_2(p)$ בצורה מפורשת.
ובכן נתבונן בשני בעיות קושי הבאות:

1
$$\left.\begin{aligned}\alpha_1'(t)+a_{11}\alpha_1(t)+a_{12}\beta_1(t)&=1\\ \beta_1'(t)+a_{21}\alpha_1(t)+a_{22}\beta_1(t)&=0\\ \alpha_1(0)=\beta_1(0)&=0\end{aligned}\right\}$$

2
$$\left.\begin{aligned}\alpha_2'(t)+a_{11}\alpha_2(t)+a_{12}\beta_2(t)&=0\\ \beta_2'(t)+a_{21}\alpha_2(t)+a_{22}\beta_2(t)&=1\\ \alpha_2(0)=\beta_2(0)&=0\end{aligned}\right\}$$

נניח שכבר קבלנו נוסחאות לתמונות $Y_1(p), Y_2(p)$ של פתרונות $y_1(t), y_2(t)$ של בעיה קושי:

$$\left.\begin{aligned}y_1'(t)+a_{11}y_1+a_{12}y_2&=f_1(t)\\ y_2'(t)+a_{21}y_1+a_{22}y_2&=f_2(t)\\ y_1(0)=y_2(0)&=0\end{aligned}\right\}$$

ונוסחאות אלה הבאות:

$$\left.\begin{aligned} y_1(p) &= \frac{(a_{22}+p)F_1(p) - a_{12}F_2(p)}{\Delta(p)} \\ y_2(p) &= \frac{(p+a_{11})F_2(p) - a_{21}F_1(p)}{\Delta(p)} \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

וכאן $f_1(t) \to F_1(p), \quad f_2(t) \to F_2(p)$

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p+a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & p+a_{22} \end{vmatrix}$$

במקרה של מערכות ①, ② מקבלים בהתאמה את הנוסחאות הבאות:

① : $f_1 \equiv 1,\ f_2 \equiv 0 \Rightarrow$

אם נסמן ב- $\alpha_1(t) \to \hat{\alpha}_1(p),\ \beta_1(t) \to \hat{\beta}_1(p) \Leftarrow$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha}_1(p) &= \frac{(a_{22}+p)\cdot 1/p - a_{12}\cdot 0}{\Delta(p)} = \frac{a_{22}+p}{\Delta(p)}\cdot\frac{1}{p} \\ \hat{\beta}_1(p) &= \frac{(p+a_{11})\cdot 0 - a_{12}\cdot 1/p}{\Delta(p)} = -\frac{a_{21}}{\Delta(p)}\cdot\frac{1}{p} \end{aligned}\right\}$$

② : $f_1 \equiv 0,\ f_2 \equiv 1$

אם נסמן ב $\alpha_2(t) \to \hat{\alpha}_2(p),\ \beta_2(t) \to \hat{\beta}_2(p) \Leftarrow$

$$\hat{\alpha}_2(p) = \frac{(a_{22}+p)\cdot 0 - a_{12}\cdot 1/p}{\Delta(p)} = -\frac{a_{12}}{\Delta(p)}\cdot\frac{1}{p}$$

$$\hat{\beta}_2(p) = \frac{(p+a_{11})\cdot 1/p - a_{21}\cdot 0}{\Delta(p)} = \frac{p+a_{11}}{\Delta(p)}\cdot\frac{1}{p}$$

ובכן בסופו של דבר קבלנו:

$$\left.\begin{aligned} p\hat{\alpha}_1(p) &= \frac{a_{22}+p}{\Delta(p)} \\ p\hat{\beta}_1(p) &= -\frac{a_{21}}{\Delta(p)} \end{aligned}\right\}, \quad \left\{\begin{aligned} p\hat{\alpha}_2(p) &= -\frac{a_{12}}{\Delta(p)} \\ p\hat{\beta}_2(p) &= \frac{p+a_{11}}{\Delta(p)} \end{aligned}\right. \quad (4.6)$$

יש למצוא שהפתרונות $(\alpha_1(t), \beta_1(t))$ ו-$(\alpha_2(t), \beta_2(t))$
קל למצוא לפי שיטות תקניות של הפוך ההתמרה
לפלאס. כעת נציב לנוסחאות (4.6) נוסחאות (4.5):

$$Y_1(p) = \frac{(a_{22}+p)}{\Delta(p)} \cdot F_1(p) - \frac{a_{12}}{\Delta(p)} F_2(p) = \left|(4.6)\right| = $$
$$= p\hat{\alpha}_1(p) F_1(p) + p\hat{\alpha}_2(p) F_2(p)$$
$$Y_2(p) = -\frac{a_{21}}{\Delta(p)} F_1(p) + \frac{p+a_{11}}{\Delta(p)} F_2(p) = \left|(4.6)\right| =$$
$$= p\hat{\beta}_1(p) F_1(p) + p\hat{\beta}_2(p) F_2(p) \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} Y_1(p) &= p\hat{\alpha}_1(p) F_1(p) + p\hat{\alpha}_2 F_2(p) \\ Y_2(p) &= p\hat{\beta}_1(p) F_1(p) + p\hat{\beta}_2(p) F_2(p) \end{aligned}\right\} \quad (4.7)$$

נניח כעת שאם $\varphi_1(t) \to \Phi_1(p)$, $\varphi_2(t) \to \Phi_2(p)$
אז לפי משפטים בורל ודיואמל מקבלים

$$\left.\begin{aligned} (\varphi_1 * \varphi_2)(t) &\to \Phi(p) \cdot \Phi_2(p) \\ \frac{d}{dt}(\varphi_1 * \varphi_2)(t) &\to p\,\Phi_1(p) \cdot \Phi_2(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

מכאן ומ-(4.7) נובע:

$$\left.\begin{aligned} Y_1(p) &= \overbrace{\frac{d}{dt}\left[(\alpha_1 * f_1)(t)\right]}(p) + \overbrace{\frac{d}{dt}\left[(\alpha_2 * f_2)(t)\right]}(p) \\ Y_2(p) &= \overbrace{\frac{d}{dt}\left[(\beta_1 * f_1)(t)\right]}(p) + \overbrace{\frac{d}{dt}\left[(\beta_2 * f_2)(t)\right]}(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

ומכאן מקבלים את הפתרון שחפשנו:

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{d}{dt}(\alpha_1 * f_1)(t) + \frac{d}{dt}(\alpha_2 * f_2)(t) \\ y_2(t) &= \frac{d}{dt}(\beta_1 * f_1)(t) + \frac{d}{dt}(\beta_2 * f_2)(t) \end{aligned}\right\}$$

גם כן נבדיר שאם פונקציה $\varphi(t)$ בעלת הנגזרת $\varphi'(t)$ והיא רציפה ו-$\varphi(0)=0$ ובנוסף $f(t)$ היא פונקציה רציפה אז מתקיימים נוסחאות הבאות:

$$\frac{d}{dt}(\varphi * f)(t) = \frac{d}{dt}\left[\int_0^t f(\xi)\varphi(t-\xi)\,d\xi\right] = f(t)\underbrace{\varphi(0)}_{=0} +$$

$$+ \int_0^t f(\xi)\varphi'(t-\xi)\,d\xi = \int_0^t f(\xi)\varphi'(t-\xi)\,d\xi \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\varphi * f)(t) = \int_0^t f(\xi)\varphi'(t-\xi)\,d\xi = (f*\varphi')(t) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= (f_1 * \alpha_1')(t) + (f_2 * \alpha_2')(t) \\ y_2(t) &= (f_1 * \beta_1')(t) + (f_2 * \beta_2')(t) \end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

נוסחאות (4.8) נרשום בצורה קלה לזיכרון:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \qquad (4.9)$$

דוגמה יש לפתור את הבעיה קושי הבאה:

$$\left.\begin{aligned} y_1'(t) + y_2(t) &= e^t \\ y_2'(t) + y_1(t) &= e^{-t} \\ y_1(0) = y_2(0) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

פתרון ראשון

להשוואה שתי שיטות נפתור את הבעיה כאן גם כן בעזרת השיטה הראשונה. במקרה הנדון ניתן למצוא פתרון כי יכולים לחשב את התמונות $F_1(p), F_2(p)$. למעשה:

$$f_1(t) = e^t \rightarrow \frac{1}{p-1}, \quad f_2(t) = e^{-t} \rightarrow \frac{1}{p+1}$$

כעת נסמן גם:

$$y_1(t) \rightarrow Y_1(p), \quad y_2(t) \rightarrow Y_2(p)$$

כיון ש $y_1(0) = y_2(0) = 0$ אז $y_1'(t) \rightarrow pY_1(p)$, $y_2'(t) \rightarrow pY_2(p)$

מכאן בדרך רגיל מקבלים את המערכת משוואות למציאת התמונות:

$$\left.\begin{array}{l} p\,Y_1(p)+Y_2(p)=\dfrac{1}{p-1} \\ Y_1(p)+p\,Y_2(p)=\dfrac{1}{p+1}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta(p)=\begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix}=p^2-1 \Rightarrow$$

$$Y_1(p)=\frac{1}{\Delta(p)}\begin{vmatrix} \frac{1}{p-1} & 1 \\ \frac{1}{p+1} & p \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta(p)}\left[\frac{p}{p-1}-\frac{1}{p+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\Delta(p)}\;\frac{p^2+p-p+1}{p^2-1}=\boxed{\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}}$$

$$Y_2(p)=\frac{1}{\Delta(p)}\begin{vmatrix} p & \frac{1}{p-1} \\ 1 & \frac{1}{p+1} \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta(p)}\left[\frac{p}{p+1}-\frac{1}{p-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{\Delta(p)}\left[\frac{p^2-p-p-1}{p^2-1}\right]=\boxed{\frac{p^2-2p-1}{(p^2-1)^2}} \Rightarrow$$

$$Y_1(p)=\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2},\quad Y_2(p)=\frac{p^2-2p-1}{(p^2-1)^2} \qquad (4.10)$$

כעת נחפש את הפיתוח לשברים פשוטים:

$$Y_1(p)=\frac{p^2+1}{(p-1)^2(p+1)^2}=\frac{A_1}{p-1}+\frac{B_1}{p+1}+\frac{C_1}{(p-1)^2}+\frac{D_1}{(p+1)^2}$$

מקדמים אלה מוצאים בדרך רגיל:

$$C_1=(p-1)^2\,Y_1(p)\Big|_{p=1}=\frac{p^2+1}{(p+1)^2}\Big|_{p=1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$D_1=(p+1)^2\,Y_1(p)\Big|_{p=-1}=\frac{p^2+1}{(p-1)^2}\Big|_{p=-1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

$$A_1=\left[(p-1)^2\,Y_1(p)\right]'\Big|_{p=1}=\frac{2p(p+1)^2-2(p+1)(p^2+1)}{(p+1)^4}\Bigg|_{p=1}=0$$

$$B_1=\left[(p+1)^2\,Y_1(p)\right]'\Big|_{p=-1}=\frac{2p(p-1)^2-2(p-1)(p^2+1)}{(p-1)^4}\Bigg|_{p=-1}=0$$

$$\Rightarrow Y_1(p) = \frac{1}{2}\frac{1}{(p-1)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{(p+1)^2} \Rightarrow$$

$$y_1(t) = \frac{te^t}{2} + \frac{te^{-t}}{2} = t\,\frac{e^t+e^{-t}}{2} = \boxed{t\operatorname{ch}t}$$

באופן דומה מקבלים:

$$Y_2(p) = \frac{p^2-2p-1}{(p-1)^2(p+1)^2} = \frac{A_2}{p-1} + \frac{B_2}{p+1} + \frac{C_2}{(p-1)^2} + \frac{D_2}{(p+1)^2} \Rightarrow$$

$$C_2 = (p-1)^2 Y_2(p)\Big|_{p=1} = \frac{p^2-2p-1}{(p+1)^2}\Big|_{p=1} = \frac{1-2-1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$D_2 = (p+1)^2 Y_2(p)\Big|_{p=-1} = \frac{p^2-2p-1}{(p-1)^2}\Big|_{p=-1} = \frac{1+2-1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = \left[(p-1)^2 Y_2(p)\right]'\Big|_{p=1} = \frac{(2p-2)(p+1)^2 - 2(p+1)(p^2-2p-1)}{(p+1)^4}\Big|_{p=1} =$$

$$= \frac{0-4(1-2-1)}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$B_2 = \left[(p+1)^2 Y_2(p)\right]'\Big|_{p=-1} = \frac{(2p-2)(p-1)^2 - 2(p-1)(p^2-2p-1)}{(p-1)^4}\Big|_{p=-1} =$$

$$= \frac{-16-2(-2)(1+2-1)}{16} = \frac{-16+8}{16} = -\frac{1}{2}$$

ולכן:

$$Y_2(p) = \frac{p^2-2p-1}{(p-1)^2(p+1)^2} = \frac{1}{2(p-1)} - \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{2(p-1)^2} + \frac{1}{2(p+1)^2}$$

מכאן מוצאים $y_2(t)$:

$$y_2(t) = \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{2}te^{-t} =$$

$$= \operatorname{sh}t - t\operatorname{sh}t = (1-t)\operatorname{sh}t \Rightarrow$$

$$\boxed{y_1(t) = t\operatorname{ch}t\,, \quad y_2(t) = (1-t)\operatorname{sh}t}$$

<u>פתרון שני</u>

קודם כל יש להרכיב את מערכות עזר (1), (2):

$$\text{(1)}\quad \left.\begin{aligned} \alpha_1' + \beta_1 &= 1 \\ \beta_1' + \alpha_1 &= 0 \\ \alpha_1(0) = \beta_1(0) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_2' + \beta_2 &= 0 \\ \beta_2' + \alpha_2 &= 1 \\ \alpha_2(0) = \beta_2(0) &= 0 \end{aligned}\right. \quad \text{(2)}$$

נעבור לתמונות: $\alpha_i(t) \to \hat{\alpha}_i(p)$, $\beta_i(t) \to \hat{\beta}_i(p)$ וכאן $i=1,2$

מכאן נובע הקשרות:

$$\hat{\text{(1)}}\quad \left.\begin{aligned} p\hat{\alpha}_1 + \hat{\beta}_1 &= \frac{1}{p} \\ \hat{\alpha}_1 + p\hat{\beta}_1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{aligned} p\hat{\alpha}_2 + \hat{\beta}_2 &= 0 \\ \hat{\alpha}_2 + p\hat{\beta}_2 &= 1/p \end{aligned}\right. \quad \hat{\text{(2)}}$$

כעת יש לפתור את המערכות אלה:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} p & 1 \\ 1 & p \end{vmatrix} = p^2 - 1$$

(דטרמיננטה של מערכות אלה)

לכן לפי כלל קרמר מקבלים:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha}_1(p) &= \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} 1/p & 1 \\ 0 & p \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(p)} = \frac{1}{p^2-1} \\ \hat{\beta}_1(p) &= \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} p & 1/p \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{p(p^2-1)} \end{aligned}\right\}$$

$$\hat{\alpha}_2(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1/p & p \end{vmatrix} = -\frac{1}{p(p^2-1)}$$

$$\hat{\beta}_2(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \begin{vmatrix} p & 0 \\ 1 & 1/p \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta(p)} = \frac{1}{p^2-1}$$

ובכן:

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha}_1(p) &= \frac{1}{p^2-1} \\ \hat{\beta}_1(p) &= -\frac{1}{p(p^2-1)} \end{aligned}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{aligned} \hat{\alpha}_2(p) &= -\frac{1}{p(p^2-1)} \\ \hat{\beta}_2(p) &= \frac{1}{p^2-1} \end{aligned}\right.$$

נשים לב שבמקרה פרטי הנדון מתקיימים שוויונים

$$\left.\begin{aligned} \hat{\alpha}_1(p) &= \hat{\beta}_2(p) \\ \hat{\beta}_1(p) &= \hat{\alpha}_2(p) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \alpha_1(t) &= \beta_2(t) \\ \beta_1(t) &= \alpha_2(t) \end{aligned}\right.$$

כעת נמצא $\alpha_1'(t)$ ו- $\beta_1'(t)$:

$$\alpha_1'(t) \to p\,\hat{\alpha}_1(p) = \frac{p}{p^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-1}+\frac{1}{p+1}\right] \Rightarrow$$

$$\alpha_1'(t) = \beta_2'(t) = \frac{e^{t}+e^{-t}}{2},$$

$$\beta_1'(t) \to p\,\hat{\beta}_1(p) = -\frac{1}{p^2-1} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p+1}-\frac{1}{p-1}\right] \Rightarrow$$

$$\beta_1'(t) = \frac{e^{-t}-e^{t}}{2}$$

ולכן:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1' &= \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \\ \beta_1'(t) &= \frac{e^{-t}-e^{t}}{2} \end{aligned}\right\} \quad , \quad \left\{\begin{aligned} \alpha_2'(t) &= \frac{e^{-t}-e^{t}}{2} \\ \beta_2'(t) &= \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \end{aligned}\right.$$

נרכיב את המטריצה:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1' & \alpha_2' \\ \beta_1' & \beta_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} & \frac{e^{-t}-e^{t}}{2} \\ \frac{e^{-t}-e^{t}}{2} & \frac{e^{t}+e^{-t}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

לפי נוסחה (4.9) נקבל:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \int_0^t \begin{pmatrix} \alpha_1'(t-s) & \alpha_2'(t-s) \\ \beta_1'(t-s) & \beta_2'(t-s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{e^{t-s}+e^{s-t}}{2} & \frac{e^{s-t}-e^{t-s}}{2} \\ \frac{e^{s-t}-e^{t-s}}{2} & \frac{e^{t-s}+e^{s-t}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{s} \\ e^{-s} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{e^{t-s}+e^{s-t}}{2}\cdot e^{s} + \frac{e^{s-t}-e^{t-s}}{2}\cdot e^{-s} \\ \frac{e^{s-t}-e^{t-s}}{2}\cdot e^{s} + \frac{e^{t-s}+e^{s-t}}{2}\cdot e^{-s} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{t}+e^{2s-t}+e^{-t}-e^{t-2s} \\ e^{2s-t}-e^{t}+e^{t-2s}+e^{-t} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \begin{pmatrix} e^t + e^{2s-t} + e^{-t} - e^{t-2s} \\ e^{2s-t} - e^t + e^{t-2s} + e^{-t} \end{pmatrix} ds =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} te^t + te^{-t} + \frac{1}{2} e^{2s-t}\Big|_0^t + \frac{1}{2} e^{t-2s}\Big|_0^t \\ \frac{1}{2} e^{2s-t}\Big|_0^t - \frac{1}{2} e^{t-2s}\Big|_0^t - te^t + e^{-t}\cdot t \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t(e^t + e^{-t}) + \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{e^{-t}}{2} - \frac{e^t}{2} \\ \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{1}{2} e^t - te^t + te^{-t} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t(e^t + e^{-t}) \\ e^t - e^{-t} + t(e^{-t} - e^t) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} y_1(t) &= t\,\frac{e^t + e^{-t}}{2} = t\,\mathrm{ch}\,t \\ y_2(t) &= \frac{1-t}{2}\,\frac{e^t - e^{-t}}{2} = (1-t)\,\mathrm{sh}\,t \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{\left.\begin{aligned} y_1(t) &= t\,\mathrm{ch}\,t \\ y_2(t) &= (1-t)\,\mathrm{sh}\,t \end{aligned}\right\}}$$