לינארית 2 - מטלה 1 - דטרמיננטה

תאריך הגשה: $12 - 14.3.2018$ כל אחד בקבוצת תרגול שלו.

הנחיות:
בראש הדף הראשון ציינו את הפרטים הבאים:

1. **מספר תרגיל**
2. **שם מלא**
3. **ת.ז**
4. **מספר קבוצת תרגול שאליה אתם מגיעים.**

תרגיל 1. חשב את הדטרמננטות הבאות בעזרת פיתוח לפי מינורים

1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

פתרון.

נפתח את הדטרימננטה לפי השורה הראשונה ונקבל

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 3 |2| + (-1)^{1+2} 1 |1| = 5$$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

פתרון.

נפתח את הדטרימננטה לפי השורה הראשונה ונקבל

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} 5 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} 9 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

הדטרמיננה של מטריצה 2×2 מתקבלת על ידי הנוסחא

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

ונקבל ש-

$$\begin{aligned} &= 1\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1(2 \cdot 1 - 7 \cdot 3) - 5(1 \cdot 1 - 7 \cdot 1) + 9(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) \\ &= -19 + 5 \cdot 6 + 9 \cdot 1 \end{aligned}$$

$$20$$

3. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & a & b & c \\ 1 & 2 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

פתרון.

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} 3 & 1 & a & b & c \\ 1 & 2 & d & e & f \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&= 3\begin{vmatrix} 2 & d & e & f \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 3\cdot 2\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} - 1\cdot 1\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= (3\cdot 2 - 1\cdot 1)\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \\
&= 5\cdot 20 = \\
&= 100
\end{aligned}$$

4. מה התובנה שלכם מהתרגיל הזה?

פתרון.

הדטרמיננטה של מטריצה מהצורה $\left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array}\right)$ שווה ל-$|A|\,|B|$.

תרגיל 2. ידוע כי המספרים $28382, 53222, 50899, 74037, 94829$ מתחלקים ב-23 ללא שארית. הראה (ללא חישוב מפורש) ש-

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 9 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 2 & 9 \end{vmatrix}$$

גם כן מתחלק ב-23 ללא שארית.

פתרון.

נשים לב שמתקיים

$$\begin{aligned}
28382 &= 2\cdot 10000 + 8\cdot 1000 + 3\cdot 100 + 8\cdot 10 + 2\cdot 1 \\
53222 &= 5\cdot 10000 + 3\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 2\cdot 10 + 2\cdot 1 \\
50899 &= 5\cdot 10000 + 0\cdot 1000 + 8\cdot 100 + 9\cdot 10 + 9\cdot 1 \\
74037 &= 7\cdot 10000 + 4\cdot 1000 + 0\cdot 100 + 3\cdot 10 + 7\cdot 1 \\
94829 &= 9\cdot 10000 + 4\cdot 1000 + 8\cdot 100 + 2\cdot 10 + 9\cdot 1
\end{aligned}$$

לכן אם נבצע את הפעולת העמודה $R_5 \leftarrow R_5 + 10R_4 + 100R_3 + 1000R_2 + 10000R_1$ נקבל

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 8 & 9 & 9 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 7 \\ 9 & 4 & 8 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 8 & 28382 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 53222 \\ 5 & 0 & 8 & 9 & 50899 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 74037 \\ 9 & 4 & 8 & 2 & 94829 \end{vmatrix}$$

כעת נשתמש בנתון שהמספרים הללו ממתחלקים ב-23 ונקבל,

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 8 & 28382 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 53222 \\ 5 & 0 & 8 & 9 & 50899 \\ 7 & 4 & 0 & 3 & 74037 \\ 9 & 4 & 8 & 2 & 94829 \end{vmatrix} = 23 \begin{vmatrix} 2 & 8 & 3 & 8 & \frac{28382}{23} \\ 5 & 3 & 2 & 2 & \frac{53222}{23} \\ 5 & 0 & 8 & 9 & \frac{50899}{23} \\ 7 & 4 & 0 & 3 & \frac{74037}{23} \\ 9 & 4 & 8 & 2 & \frac{94829}{23} \end{vmatrix}$$

והביטוי שקבלנו מתחלק ב-23 ללא שארית.

תרגיל 3. הוכח בעזרת אינדוקציה שהדטרמיננטה של מטריצה משולשית תחתונה היא כפל איברי האלכסון.

פתרון.

נוכיח זאת בעזרת אינדוקציה על גודל המטריצה.

$n=2$: תהי $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ אז $|A| = a_{11}a_{22} - 0a_{21} = a_{11}a_{22}$

נניח את נכונות הטענה עבור n, וכעת נוכיח עבור $n+1$.

תהיה מטריצה

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}$$

כדי לחשב את הדטרמיננטה נפתח לפי השורה הראשונה ונקבל

$$|A| = (1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n+1n+1} \end{vmatrix}$$

זאת דטרמיננטה של מטריצה משולשית תחתונה מסדר $n \times n$, לכן לפי הנחת האינדוקציה היא שווה למכפלת איברי, לכן

$$|A| = a_{11} \cdot (a_{22}a_{33}a_{44} \dots a_{n+1n+1}) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}$$

תרגיל 4. נסמן

$$E(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_1 & n & n & n & \cdots & n & n \\ n & a_2 & n & n & \cdots & n & n \\ n & n & a_3 & n & \cdots & n & n \\ n & n & n & a_4 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & a_{n-1} & n \\ n & n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}$$

הוכח (בלי אינדוקציה) שמתקיים $|E(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_{n-1})| = n \prod_{i=1}^{n-1} (a_i - n)$

פתרון.
נבצע את הפעולה שורה

$$\begin{vmatrix} a_1 & n & n & n & \cdots & n & n \\ n & a_2 & n & n & \cdots & n & n \\ n & n & a_3 & n & \cdots & n & n \\ n & n & n & a_4 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & n & \cdots & a_{n-1} & n \\ n & n & n & n & \cdots & n & a_n \end{vmatrix} \quad \overset{R_i \leftarrow R_i - R_n}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1-n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2-n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3-n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_4-n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1}-n & 0 \\ n & n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} =$$

$$= n\prod_{i=1}^{n-1}(a_i-n)$$

תרגיל 5. הוכח: A_i הפיכה לכל $1 \le i \le n$ אם ורק אם $\prod_{i=1}^{n} A_i$ הפיכה

פתרון.

$$\begin{gathered} \forall 1 \le i \le n: \quad A_i \quad \text{invertible} \\ \Updownarrow \\ \forall 1 \le i \le n: \quad |A_i| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ \prod_{i=1}^{n} |A_i| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ \left|\prod_{i=1}^{n} A_i\right| \neq 0 \\ \Updownarrow \\ \prod_{i=1}^{n} A_i \quad \text{invertible} \end{gathered}$$

תרגיל 6. המטריצות A, B נקראות דומות אם קיימת מטריצה P הפיכה המקיימת $A = P^{-1}BP$. הוכח הפרך:

1. אם A, B דומות אז $|A| = |B|$
2. אם $|A| = |B|$ אז A, B דומות.

פתרון.

1. נכון,

$$
\begin{gathered}
A, B \quad \text{similar} \\
\Downarrow \\
\exists P: \quad A = P^{-1}BP \\
\Downarrow \\
\exists P: \quad |A| = \left|P^{-1}BP\right| \\
\Downarrow \\
\exists P: \quad |A| = \left|P^{-1}\right| |B| |P| \\
\Downarrow \\
\exists P: \quad |A| = \left|P^{-1}\right| |B| |P| \\
\Downarrow \\
\exists P: \quad |A| = |P|^{-1} |B| |P| \\
\Downarrow \\
|A| = |B|
\end{gathered}
$$

2. לא נכון, דוגמא נגדית $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אז

$$|A| = |B| = 0$$

אבל לכל מטריצה P מתקיים

$$P^{-1}BP = B \neq A$$

המטרה בסעיף הזה שתביאו שתי מטריצות לא דומות בעלות **אותו סדר** עם דטרמיננטה זהה.

בהצלחה!!