אינפי 1 - פתרון 5

1. נגדיר סדרה באמצעות כלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n^{\ 2}+1\right),\ a_1=c$. בדקו האם הסדרה מתכנסת, אם כן מצאו את גבולה והוכיחו שהוא אכן הגבול (אחרת, הוכיחו שהיא מתבדרת) במקרים הבאים:

א. $c=\frac{1}{2}$

ב. $c=2$

<u>פתרון</u>

א. נוכיח שהסדרה מתכנסת. תחילה נשים לב שהיא מונוטונית עולה.

אכן: $a_{n+1}\ge a_n \ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a_n^{\ 2}+1\right)\ge a_n \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2}a_n^2-a_n+\frac{1}{2}\ge 0 \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{2}\left(a_n-1\right)^2\ge 0$

כעת נראה שהיא חסומה מלעיל על ידי 1. באינדוקציה: $a_1=0.5\le 1$.

נניח ש- $a_n\le 1$ ונוכיח $a_{n+1}\le 1$. מתקיים

$a_{n+1}=0.5\left(a_n^{\ 2}+1\right)\le 0.5\left(1+1\right)=1$ (אי השוויון מתקיים בזכות הנחת האינדוקציה).

לסיכום, הסדרה מתכנסת. נמצא את גבולה:

$L=\lim a_{n+1}=\lim 0.5\left(a_n^{\ 2}+1\right)=0.5\lim a_n^{\ 2}+0.5=0.5L^2+0.5$. מפתרון משוואה ריבועית נקבל ש- $L=1$.

ב. הסדרה אינה מתכנסת. ראשית כל, זו סדרה מונוטונית עולה (אותה הוכחה כמו בסעיף הקודם). שנית, נראה שהיא אינה חסומה מלעיל. נניח בשלילה שהיא חסומה מלעיל. אזי מכך שהיא מונוטונית עולה וחסומה מלעיל אנו מקבלים שהיא מתכנסת. מחישוב גבול (כמו בסעיף הקודם) מקבלים שהגבול הוא 1. אך זאת סתירה, מכיוון שהאיבר הראשון הוא 2 והסדרה עולה. לכן, הסדרה אינה חסומה מלעיל, ולכן (מכיוון שהיא מונוטונית עולה) היא אינה מתכנסת (כמובן, במובן הצר. עם זאת היא כן מתכנסת במובן הרחב).

2. א. מצאו את הגבול של הסדרה: $a_n=\frac{5^{2n}}{3^{(n+1)^2}}$.

ב. הוכיחו או הפריכו: הסדרה $a_n=\sqrt[n]{n}$ היא מונוטונית (עולה או יורדת) החל ממקום מסויים.

<u>פתרון</u>

א. נוכיח תחילה שהסדרה מונוטונית יורדת. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^2}{3^{2n+3}}\le 1$. הסדרה חסומה מלרע על ידי אפס, ולכן הסדרה מתכנסת.
נמצא את גבולה: ניעזר ביחס שמצאנו:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{5^2}{3^{2n+3}} \Rightarrow a_{n+1}=\frac{5^2}{3^{2n+3}}a_n \Rightarrow L=0\cdot L \Rightarrow L=0$$

ב. הסדרה מונוטונית יורדת החל מ-$n=3$. נוכיח זאת.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)^{\frac{1}{n+1}}}{n^{\frac{1}{n}}}=\frac{(n+1)^{\frac{n}{n(n+1)}}}{n^{\frac{n+1}{n(n+1)}}}=\frac{(n+1)^{\frac{n}{n(n+1)}}}{n^{\frac{n}{n(n+1)}}n^{\frac{1}{n(n+1)}}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n(n+1)}}}{n^{\frac{1}{n(n+1)}}}$$

. כעת,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 1 \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n(n+1)}}}{n^{\frac{1}{n(n+1)}}}\le 1 \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{n(n+1)}}\le n^{\frac{1}{n(n+1)}} \Leftrightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\le n$$

ואי שוויון זה מתקיים, כפי שראיתם בהרצאה, החל מ-$n=3$ (מספר אוילר).

3. תהי $\{a_n\}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל. הוכיחו/הפריכו:

א. $\{a_n\}$ שואפת לאינסוף

ב. ל-$\{a_n\}$ יש תת סדרה ששואפת לאינסוף

ג. $a_{n+1}\ge a_n$ עבור אינסוף n-ים.

פתרון

א. הפרכה: $a_n=(-1)^n n$ אינה חסומה מלעיל, אך אינה שואפת לאינסוף.

ב. הוכחה: $\{a_n\}$ אינה חסומה מלעיל, כלומר לכל $M>0$ קיים n_0 כך ש $a_{n_0}>M$. ניקח $M_1>\max\{a_1,...,a_{n_0}\}$ ולכן קיים $n_1>n_0$ כך ש $a_{n_1}>M_1>a_{n_0}$
נמשיך בתהליך זה עד שנקבל תת סדרה a_{n_k} מונוטונית עולה ולא חסומה ולכן מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

ג. הוכחה: נניח בשלילה שיש מספר סופי של אינדקסים כנ"ל. נסמן $n_0=\max\{n: a_{n+1}\ge a_n\}$. אזי לכל $n\ge n_0+1$ מתקיים $a_{n+1}<a_n$. כלומר, החלק ממקום מסויים הסדרה מונוטונית יורדת, ולכן חסומה מלעיל (מדוע?) בסתירה לנתון.

4. תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, ונתון $a_1=c>0$

א. עבור אילו ערכי c הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?
ב. עבור אילו ערכי c הסדרה מתכנסת?
ג. מה גבול הסדרה עבור ערכי c מהסעיף הקודם?

<u>פתרון</u>

א. רוצים לראות מתי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ גדול מאחד או קטן מאחד. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{a_n}}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$. לכן, אם $a_n<1$ אזי $\sqrt{a_n}<1$ ולכן $\frac{1}{\sqrt{a_n}}>1$ ולכן $a_{n+1}>a_n$. לכן הסדרה תהא מונוטונית עולה אם כל האיברים שלה יהיו קטנים מאחד. אבל קל להראות באינדוקציה שאם $c<1$ אזי כל איברי הסדרה קטנים מאחד: נניח $a_n<1$ לכן $a_{n+1}=\sqrt{a_n}<1$.
באופן דומה, ניתן להראות שעבור $c\geq 1$ הסדרה מונוטונית יורדת.
עבור $c=1$ הסדרה היא קבועה, ולכן ניתן להגדירה הן כמונוטונית יורדת והן כמונוטונית עולה.

ב. הסדרה יורדת וחסומה על ידי 1 או עולה וחסומה על ידי 1 ולכן מתכנסת תמיד.

ג. $\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$. נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ לכן לפי שאלה קודמת ביחד מקבלים $L=\sqrt{L}$ לכן $L^2-L=0$ לכן $L=0$ או $L=1$. אם $c>1$ אז כל איברי הסדרה גדולים מאחד ולכן גבול הסדרה גדול שווה 1 ובפרט אינו אפס. אם $c\leq 1$ אז הסדרה מונוטונית עולה ולכן כל איברי הסדרה גדולים שווים ל c ולכן גבול הסדרה גדול שווה ל c אבל $c>0$ ולכן גבול הסדרה שוב לא יכול להיות אפס. לכן גבול הסדרה הינו 1.

5. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ ונתון $a_1>0$.
הוכיחו ש- $\{a_n\}$ אינה חסומה. (רמז: הראו שהיא מונוטונית קודם כל).

<u>פתרון</u>

קל להראות באינדוקציה ש$a_n\geq 0$ לכל n. ולכן $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}\geq 0$ כלומר הסדרה מונוטונית עולה. נניח ש$\{a_n\}$ הייתה חסומה, לכן היא הייתה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול L כלשהוא. לכן

$L=\lim a_{n+1}=\lim(a_n+\frac{1}{a_n})=L+\frac{1}{L}$ ולכן $L=L+\frac{1}{L}$ ולכן $\frac{1}{L}=0$. אבל אין מספר ממשי שמקיים את המשוואה הזו, וזו סתירה לכך שהסדרה מתכנסת, ולכן היא אינה חסומה.

6. יהיו $\{a_n\},\{b_n\}$ שתי סדרות ויהיו A,B קבוצות הגבולות החלקיים שלהם במובן הצר, בהתאמה. תהי $c_n=a_n+b_n$ סדרה, ותהי C קבוצת הגבולות החלקיים שלה (גם כן במובן הצר). הוכיחו או הפריכו:

א. $C\subseteq A$

ב. $C\subseteq A\bigcup B$

ג. $C=\{a+b : a\in A, b\in B\}$

<u>**פתרון**</u>

1. הפרכה: ניקח את הסדרות הקבועות: $a_n=1, b_n=2$ אזי $c_n=3$. מתקיים $A=\{1\}, C=\{3\}$ ולכן $C\not\subset A$.
2. הפרכה: הדוגמא של הסעיף הקודם מפריכה גם סעיף זה.
3. הפרכה: ניקח את הסדרות $a_n=(-1)^n, b_n=2\cdot(-1)^n$. אזי $c_n=3\cdot(-1)^n$.

מתקיים $A=\{-1,1\},\ B=\{-2,2\},\ A+B=\{-3,1,-1,3\}$ ואילו $C=\{-3,3\}$ ולכן השוויון לא מתקיים.

7. תהי $\{a_n\}$ סדרה ותהי $\{b_n\}$ סדרה המתלכדת עם $\{a_n\}$ החל ממקום מסויים. האם כל גבול חלקי של $\{b_n\}$ הוא גם גבול חלקי של $\{a_n\}$? הוכיחו או הפריכו!

<u>**פתרון**</u>

הוכחה: לפי הנתון קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $a_n=b_n$. יהי L גבול חלקי של b_n. אזי בכל סביבה של L יש אינסוף איברי b_n ולכן גם אינסוף איברי a_n (מדוע? כי פרט למספר סופי של איברים, הסדרות מתלכדות!). לכן L הוא גבול חלקי של a_n.