חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: דר' הורוביץ
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

אינפי 1 – פתרון תרגיל 5

שאלה 1

תהי $\{a_n\}$ סדרה שאינה חסומה מלעיל. הוכיחו/הפריכו:

א. $\{a_n\}$ שואפת לאינסוף;

ב. ל- $\{a_n\}$ יש תת סדרה ששואפת לאינסוף;

ג. $a_{n+1} \geq a_n$ עבור אינסוף n-ים.

פתרון

א. הפרכה: $a_n = (-1)^n n$ אינה חסומה מלעיל, אך אינה שואפת לאינסוף.

ב. הוכחה: $\{a_n\}$ אינה חסומה מלעיל, כלומר יהי $M = 1$. קיים n_0 כך ש- $a_{n_0} > 1$. ניקח $M_1 > \max\{2, a_1, ..., a_{n_0}\}$ ולכן קיים $n_1 > n_0$ כך ש $a_{n_1} > M_1 > a_{n_0}$ נמשיך בתהליך זה עד שנקבל תת סדרה a_{n_k} מונוטונית עולה ולא חסומה ולכן מתכנסת במובן הרחב לאינסוף.

ג. הוכחה: נניח בשלילה שיש מספר סופי של אינדקסים כנ"ל. נסמן $n_0 = \max\{n : a_{n+1} \geq a_n\}$. אזי לכל $n \geq n_0 + 1$ מתקיים $a_{n+1} < a_n$. כלומר, החלק ממקום מסויים הסדרה מונוטונית יורדת, ולכן חסומה מלעיל (מדוע?) בסתירה לנתון.

מש"ל

שאלה 2

יהיו $\{a_n\}, \{b_n\}$ שתי סדרות ויהיו A, B קבוצות הגבולות החלקיים שלהם במובן הצר, בהתאמה. תהי $c_n = a_n + b_n$ סדרה, ותהי C קבוצת הגבולות החלקיים שלה (גם כן במובן הצר). הוכיחו או הפריכו:

א. $C \subseteq A$;

ב. $C \subseteq A \cup B$;

ג. $C=\{a+b : a\in A, b\in B\}$.

פתרון

א. הפרכה: ניקח את הסדרות הקבועות: $a_n=1, b_n=2$ אזי $c_n=3$. מתקיים $A=\{1\}, C=\{3\}$ ולכן $C\not\subset A$.

ב. הפרכה: הדוגמה של הסעיף הקודם מפריכה גם סעיף זה.

ג. הפרכה: ניקח את הסדרות $a_n=(-1)^n, b_n=2\cdot(-1)^n$. אזי $c_n=3\cdot(-1)^n$. מתקיים $A=\{-1,1\},\ B=\{-2,2\},\ A+B=\{-3,1,-1,3\}$ ואילו $C=\{-3,3\}$ ולכן השויון לא מתקיים.

מש"ל

שאלה 3

תהי $\{a_n\}$ סדרה ותהי $\{b_n\}$ סדרה המתלכדת עם $\{a_n\}$ החל ממקום מסויים. האם כל גבול חלקי של $\{b_n\}$ הוא גם גבול חלקי של $\{a_n\}$? הוכיחו או הפריכו!

פתרון

הוכחה: לפי הנתון קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $a_n=b_n$. יהי L גבול חלקי של b_n. אזי בכל סביבה של L יש אינסוף איברי b_n ולכן גם אינסוף איברי a_n (מדוע? כי פרט למספר סופי של איברים, הסדרות מתלכדות!). לכן L הוא גבול חלקי של a_n.

מש"ל

שאלה 4

חשבון את גבול הסדרות:

א. $$a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}$$

פתרון

$$a_n=\left(\frac{n^2-2}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}=\left(\frac{n^2-3}{n^2-3}+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-1}=\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4n^2-12+11}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{4(n^2-3)}\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}=\left(\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right)^4\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}$$

כעת, $\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{11}$ זה כפל של 11 (מספר קבוע) פעמים של סדרה ששואפת לאחד,

ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות שואף לאחד.

$\left(\left(1+\frac{1}{n^2-3}\right)^{n^2-3}\right)^4$ זה כפל של 4 פעמים סדרה ששואפת ל e ולכן שואף ל e^4. סה"כ

$a_n \to e^4$.

ב. $a_n=\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}$

פתרון

$$a_n=\left(\frac{2n^3-1}{2n^3+3}\right)^{3n^3+4}=\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{6\left(\frac{2n^3+3}{4}\right)-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\left(1-\frac{1}{\frac{2n^3+3}{4}}\right)^{\frac{2n^3+3}{4}}\right)^6\left(1-\frac{4}{2n^3+3}\right)^{-\frac{1}{2}}\to\left(e^{-1}\right)^6\cdot 1=e^{-6}$$

מש"ל

שאלה 5

הוכיחו: $\overline{\lim}a_n=-\underline{\lim}(-a_n)$.

פתרון

נפתור באמצעות סדרות.

נוכיח אי שוויון בשני הכיוונים.

<u>הכיוון הראשון</u>: $\overline{\lim} a_n \le -\underline{\lim}(-a_n)$.

לפי הגדרת הגבול העליון קיימת תת סדרה של $\{a_n\}$ המקיימת: $a_{n_k} \to \overline{\lim} a_n$.
נכפיל במינוס אחד (מדוע מותר לעשות זאת? אריתמטיקה של גבולות.) ונקבל:
$-a_{n_k} \to -\overline{\lim} a_n$. מכיוון ש- $\{-a_{n_k}\}$ היא תת סדרה של $\{-a_n\}$, מקבלים ש-
$\left(-\overline{\lim} a_n\right)$ הוא גבול חלקי של סדרה זו. מכיוון ש- $\underline{\lim}\left(-a_n\right)$ הוא הגבול החלקי
הקטן ביותר, נקבל $\underline{\lim}\left(-a_n\right) \le -\overline{\lim} a_n$. נכפיל את שני האגפים ב- (-1) ונקבל:
$-\underline{\lim}\left(-a_n\right) \ge \overline{\lim} a_n$, כדרוש (בכיוון הזה).

<u>הכיוון השני</u>: $\overline{\lim} a_n \ge -\underline{\lim}(-a_n)$

לפי הגדרת גבול תחתון (הפעם לגבי הסדרה $\{-a_n\}$) קיימת תת סדרה המקיימת:
$-a_{n_k} \to \underline{\lim}\left(-a_n\right)$. שוב, זה שקול ל- $a_{n_k} \to -\underline{\lim}\left(-a_n\right)$. בנוסף, $\overline{\lim} a_n$ הוא הגבול
החלקי הגדול ביותר של $\{a_n\}$ ולכן $-\underline{\lim}\left(-a_n\right) \le \overline{\lim} a_n$ ולכן $\underline{\lim} a_n \le -\overline{\lim}\left(-a_n\right)$.

כאן סיימנו את הוכחת הכיוון השני, ולכן גם את הוכחת כל התרגיל.

מש"ל

שאלה 6

הוכיחו שאם $\{a_n\}$ מתכנסת ו $\{b_n\}$ חסומה אזי $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right) = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$.

פתרון

$\overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של b_n לכן קיימת תת סדרה $\{b_{n_k}\}$ כך ש
$b_{n_k} \to \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$. $\{a_n\}$ מתכנסת, נגיד לגבול L , לכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לגבול L
ולכן $a_{n_k} \to L$ ו $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n = L$. ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות
$\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right) = \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n$ כלומר זה גבול חלקי של הסדרה a_n+b_n. $\overline{\lim}_{n\to\infty}\left(a_n+b_n\right)$
הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של הסדרה a_n+b_n, ולכן $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim}_{n\to\infty} b_n \le \overline{\lim}\left(a_n+b_n\right)$.

בכיוון ההפוך, קיימת תת סדרה של a_n+b_n, שהיא $a_{n_k}+b_{n_k}$ כך ש $\lim\limits_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)$. שוב, $\{a_n\}$ מתכנסת ולכן גם כל תת סדרה שלה מתכנסת ולכן $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$ ולפי אריתמיטקה של גבולות,

$\lim\limits_{k\to\infty}b_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\left(b_{n_k}+a_{n_k}-a_{n_k}\right)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)-\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$ ולכן

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\lim b_{n_k}\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$ ולכן $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$.

לסיום, אם $a\le b$ וגם $b\le a$ אזי $a=b$, במקרה שלנו קיבלנו $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\left(a_n+b_n\right)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}b_n$.

מש"ל

שאלה 7

תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right)$ ו- $a_1=13$.

הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

פתרון

$$|a_m-a_n|=|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}-\ldots-a_{n+1}+a_{n+1}-a_n|\le|a_m-a_{m-1}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|=$$

$$\left|(-1)^{m-1}\left[\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\right]\right|+\ldots+\left|(-1)^n\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right]\right|=\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\le$$

$$\le\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{2^{m-n-1}}+\ldots+1\right]=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}\le\frac{1}{2^n}\to 0$$

לכן זו סדרת קושי ולכן היא מתכנסת (ללא תלות באיבר הראשון כלל).

מש"ל

שאלה 8

חשבון אינפיניטסימלי 1
מרצה: דר' הורוביץ
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

נניח $a_n \to a, b_n \to b$. הוכיחו: אם $a<b$ אזי $a_n < b_n$ החל ממקום מסוים.

פתרון

נניח ש $a_n \to a, b_n \to b$ ו-$a<b$. יהי $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$. אזי $\varepsilon > 0$ ומהגדרת הגבול נקבל שבפרט קיימים $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n - a < \varepsilon$ ולכל $n \geq n_1$ מתקיים $-\varepsilon < b_n - b$.

מהצבת $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ נקבל שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $a_n < \frac{a+b}{2}$ ולכל $n \geq n_1$ מתקיים $b_n > \frac{a+b}{2}$. יהי $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$ אזי לכל $n \geq n_2$ מתקיים $b_n > \frac{a+b}{2} > a_n$.

מש"ל