תרגול 9

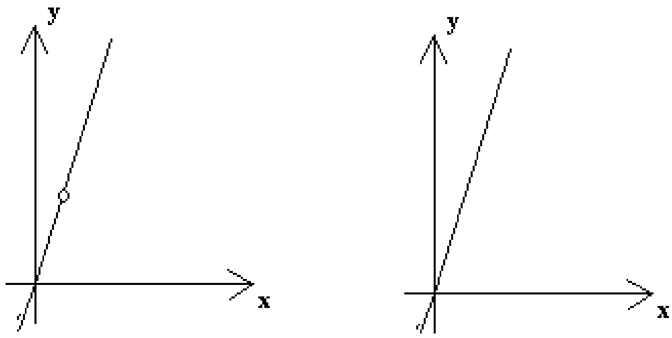
נושא השיעור: 3 – סוגי אי רציפות, רציפות במידה שווה, הגדרת הנגזרת.

<u>מיון נקודות אי רציפות</u>

<u>נקודת אי רציפות סליקה</u>

לפני שנגדיר נקודת אי רציפות סליקה נתחיל בדוגמא.

נתבונן בגרף של הפונקציה $f(x)=2x$ ובגרף של הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2-2x}{x-1}$.



נשים לב שהפונקציות זהות לחלוטין למעט נקודה אחת $(1,2)$.

אם נוסיף את הנקודה $(1,2)$ לגרף השמאלי נקבל פונקציה רציפה שהיא הגרף הימני.

נקודה $(1,2)$ ממחישה את ההגדרה של נקודת אי רציפות סליקה. כעת נעבור להגדרה הפורמאלית.

<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 (במובן הצר) קיימים ושווים אבל הגבול שונה מ $f(x_0)$ או ש $f(x)$ כלל אינה מוגדרת בנקודה x_0 , אז לפונקציה יש ב x_0 נקודת אי רציפות סליקה.

<u>דוגמאות</u>

1. בדוגמא הקודמת הפונקציה $f(x)=\frac{2x^2-2x}{x-1}$ לא מוגדרת בנקודה $x_0=1$ ומתקיים $\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)$ ולכן לפונקציה יש נקודת אי רציפות סליקה ב $x_0=1$.
2. נתבונן בפונקציה $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+3x-10}{x-2} & x\neq 2\\ 3 & x=2\end{cases}$. במקרה זה $\lim_{x\to2^+} f(x)=\lim_{x\to2^-} f(x)=7\neq f(2)$ אומנם הפונקציה מוגדרת ב $x_0=2$ אבל היא עדיין אי רציפה בנקודה זו.

<u>אי רציפות מסוג ראשון</u>

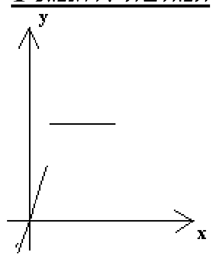
<u>הגדרה</u>

אם הגבולות החד צדדיים ב x_0 קיימים ושונים (במובן הצר) נאמר שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון.

<u>דוגמא 1</u>

נתבונן בפונקציה $f(x)=\begin{cases}6 & x>2\\ 2x & x\leq 2\end{cases}$. במקרה זה מתקיים $\lim_{x\to2^+} f(x)\neq\lim_{x\to2^-} f(x)$.

המחשה לדוגמא 1



דוגמא 2

$f\left(x\right)=\frac{\left|\sin x\right|}{x}+3$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=2, \lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=4$ נקבל שהפונקציה אי רציפה מסוג ראשון בנקודה $x_0=0$.

אי רציפות מסוג שני

נקודה x_0 נקראת נקודת אי רציפות מסוג שני של הפונקציה $f\left(x\right)$ אם:

א. $f\left(x\right)$ מוגדרת בסביבת הנקודה x_0 , פרט אולי ל x_0 עצמה.

ב. לפחות אחד מן הגבולות החד צדדיים בנקודה x_0 אינו קיים.

דוגמא 1

הפונקציה $f\left(x\right)=\sin\frac{1}{x-1}$ אי רציפה מסוג שני בנקודה $x_0=1$ מכיוון ש $\lim\limits_{x\to 1^+} f\left(x\right)$ אינו קיים, במקרה זה גם הגבול $\lim\limits_{x\to 1^-} f\left(x\right)$ לא קיים.

דוגמא 2

$f\left(x\right)=\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$ במקרה זה הגבול $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)$ קיים אבל הגבול $\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)$ לא קיים ולכן הנקודה $x_0=0$ היא נקודת אי רציפות מסוג שני.

רציפות במידה שווה

הגדרה על פי קושי

תהא f פונקציה המוגדרת בקטע I . נאמר כי f רציפה במידה שווה ב I אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in I$ מתקיים $\left|x_1-x_2\right|<\delta \Rightarrow \left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|<\varepsilon$.

הערה

בחירת δ תלויה רק ב ε ולא בנקודות $x_1,x_2\in I$.

הגדרה על פי היינה (טובה בד"כ לשלילה)

תהא f פונקציה המוגדרת בקטע I . נאמר כי f רציפה במידה שווה ב I אם:

לכל $x_n,y_n\in I$ מתקיים $\left|x_n-y_n\right|\xrightarrow{n\to\infty}0 \Rightarrow \left|f\left(x_n\right)-f\left(y_n\right)\right|\xrightarrow{n\to\infty}0$.

תרגיל

הוכח כי הפונקציה $\ln x$ אינה רציפה במידה שווה בקטע $\left(0,1\right)$.

פתרון

הנקודה הבעייתית היא 0. נמצא שתי סדרות בקטע $\left(0,1\right)$ ששואפות לאפס כך שההפרש ביניהן שואף לאפס אבל בהצבתן נקבל ביטוי שלא שואף לאפס. $x_n=\frac{1}{n}, y_n=\frac{1}{2n}$ אבל $\left|\ln\frac{1}{n}-\ln\frac{1}{2n}\right|=\ln 2$

משפט קנטור

פונקציה רציפה בקטע סגור $[a,b]$ רציפה בו במידה שווה.

תרגיל

הוכח כי $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ רציפה במידה שווה בקטע הפתוח $(0,1)$.

פתרון

נרחיב את הפונקציה לקטע הסגור $[0,1]$.

ונקבל פונקציה רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן לפי משפט קנטור $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & 0<x\le 1\\ 1 & x=0\end{cases}$

הפונקציה $f(x)$ רציפה בקטע $[0,1]$ במידה שווה ובפרט בקטע הפתוח $(0,1)$.

פונקציה מונוטונית

הגדרה

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים $x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית עולה ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים

$x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)< f(x_2)$.

נאמר ש $f(x)$ מונוטונית יורדת ממש בתחום D, אם לכל $x_1,x_2\in D$ מתקיים

$x_1\le x_2 \Rightarrow f(x_1)> f(x_2)$.

דוגמא

הפונקציה $f(x)=\ln x$ עולה ממש בתחום $D=\{x\in\mathbb{R} | x>0\}$.

נראה זאת לפי ההגדרה: יהיו $x_1,x_2\in D$ כך ש $x_1<x_2$ כעת $f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{x_2}{x_1}$ מכיוון ש

$0<x_1<x_2$ נקבל ש $\frac{x_2}{x_1}>1$ ולכן $f(x_2)-f(x_1)=\ln\frac{x_2}{x_1}>0$ ואז הפונקציה $f(x)$ עולה ממש.

תרגיל

נתון שהפונקציות f,g עולות ממש ב $\mathbb{R}$ הוכח שהפונקציה $f\circ g$ גם עולה ממש.

פתרון

יהיו $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ כך ש $x_1<x_2$. $f\circ g(x_2)-f\circ g(x_1)=f(g(x_2))-f(g(x_1))$.

מכיוון ש g פונקציה עולה ממש ומכיוון ש $x_1<x_2$ נקבל ש $y_1:=g(x_1)<y_2:=g(x_2)$ ואז

$y_1,y_2\in\mathbb{R}$ כך ש $y_1<y_2$ ומכיוון ש f פונקציה עולה ממש נקבל ש

$f\circ g(x_2)-f\circ g(x_1)=f(g(x_2))-f(g(x_1))=f(y_2)-f(y_1)>0$ כדרוש.

הנגזרת

הגדרת הנגזרת, דוגמא לנגזרת של פונקציה לפי הגדרת הנגזרת.