פירוק לשברים חלקיים

בהינתן פונקציה רציונלית $\frac{P(x)}{Q(x)}$, כאשר $P(x), Q(x)$ פולינומים, רוצים לפרק את זה לשברים חלקיים.

מחלקים את הפולינומים ומקבלים $\frac{P(x)}{Q(x)} = \tilde{P}(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$ כאשר $\tilde{P}(x)$ פולינום ו- $\deg R < \deg Q$.

לכן נוכל להניח בה"כ כי $\deg P < \deg Q$.

נפרק את $Q(x)$ לגורמים אי־פריקים. נניח שהפירוק הינו:

$$(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\ldots(x-a_m)^{e_m}\left(x^2-b_1x+c_1\right)^{f_1}\left(x^2-b_2x+c_2\right)^{f_2}\ldots\left(x^2-b_1x+c_n\right)^{f_n} =$$
$$= R_1(x)^{e_1}\ldots R_m(x)^{e_m}S_1(x)^{f_1}\ldots S_n(x)^{e_n}$$

כאשר $\deg R_i = 1, \deg S_j = 2$.

<u>**משפט:**</u> פירוק לשברים חלקיים

אם $Q(x)$ מתפרק כנ"ל, אזי:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{R_1(x)} + \ldots + \frac{A_{1,e_1}}{R_1(x)^{e_1}} + \frac{A_{2,1}}{R_2(x)} + \ldots + \frac{A_{2,e_2}}{R_2(x)^{e_2}} + \ldots + \frac{A_{m,1}}{R_m(x)} + \ldots + \frac{A_{m,e_m}}{R_m(x)^{e_m}} +$$
$$+ \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{S_1(x)} + \ldots + \frac{B_{1,f_1}x + C_{1,f_1}}{S_1(x)^{f_1}} + \ldots + \frac{B_{n,1}x + C_{n,1}}{S_n(x)} + \ldots + \frac{B_{n,f_n}x + C_{n,f_n}}{S_n(x)^{f_n}}$$

<u>**דוגמה 1:**</u>

$$\int \frac{1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}dx = ?$$

נשים לב כי $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)\left(x^2+4\right)$.

מפרקים לשברים חלקיים: עבור $A, B, C \in \Re$,

$$\frac{1}{(x-1)\left(x^2+4\right)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$$
$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A\left(x^2+4\right) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)\left(x^2+4\right)} = \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$$

אנחנו רוצים שזה יהיה שווה ל- $\frac{1}{(x-1)\left(x^2+4\right)}$, כלומר רוצים:

$$(A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C = 1 = 0\cdot x^2 + 0\cdot x + 1$$

לכן, מקבלים מערכת של משוואות לינאריות:

$$\begin{aligned} A+B \quad\quad &= 0 \\ -B+C &= 0 \\ 4A \quad -C &= 1 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} A+C &= 0 \\ 4A-C &= 1 \end{aligned}\right\} 5A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{5}$$

$$A+C=0 \Rightarrow C = -\frac{1}{5}$$

$$-B+C=0 \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

לכן,

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{1}{5(x-1)} - \frac{x+1}{5(x^2+4)}$$

מקבלים:

$$\int \frac{1}{(x-1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{5}\int\frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{5}\int\frac{x+1}{x^2+4}dx = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\int\frac{x+1}{x^2+4}dx$$

נותר למצוא את האינטגרל הלא־מסוים $\int\frac{x+1}{x^2+4}dx$.

$$\int\frac{x+1}{x^2+4}dx = \int\frac{x}{x^2+4}dx + \int\frac{1}{x^2+4}dx$$

עבור האינטגרל הראשון נבצע הצבה: $u = x^2+4 \Rightarrow du = 2x\,dx \Rightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx$. נשים לב כי u תמיד חיובי. מקבלים:

$$\int\frac{x}{x^2+4}dx = \int\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{2}du = \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\ln u + c = \frac{1}{2}\ln(x^2+4) + c$$

עבור האינטגרל השני, מקבלים:

$$\int\frac{1}{x^2+4}dx = \frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}dx = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$

לכן,

$$\int\frac{1}{(x-1)(x^2+4)}dx = \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+4) + \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c\right) =$$
$$= \frac{1}{5}\ln|x-1| - \frac{1}{10}\ln(x^2+4) - \frac{1}{10}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + c$$