אינפי 1 – תרגיל 5

1. תהי $\{b_n\}$ סדרה יורדת. הוכח ש $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}$

הוכחה:

נסמן $L=\inf\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}$. לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $b_{N_\varepsilon}\in\{b_1,b_2,b_3,\ldots\}$ כך ש $b_{N_\varepsilon}<L+\varepsilon$. אבל מכיוון שהסדרה מונוטונית יורדת לכל $n>N_\varepsilon$ מתקיים $b_n\le b_{N_\varepsilon}<L+\varepsilon$. אבל L חסם מלרע ולכן מתקיים גם $L<b_n<L+\varepsilon$ ולכן ברור ש $L-\varepsilon<b_n<L+\varepsilon$ כלומר $|b_n-L|<\varepsilon$ וסה"כ הראנו שהגדרת הגבול מתקיימת.

2. תהי $\{a_n\}$ סדרה המתכנסת ל L ‏. $0<L$. הוכח ש $\lim_{x\to\infty}\sqrt{a_n}=\sqrt{L}$

הוכחה:

$$\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right|=\left|\frac{\left(\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right)\left(\sqrt{a_n}+\sqrt{L}\right)}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|=\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{a_n}+\sqrt{L}}\right|\le\left|\frac{a_n-L}{\sqrt{L}}\right|=\frac{1}{\sqrt{L}}|a_n-L|$$

לכן לכל $\varepsilon>0$, מתקיים $\sqrt{L}\varepsilon>0$ ולכן קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\sqrt{L}\varepsilon$ ולכן מתקיים $\left|\sqrt{a_n}-\sqrt{L}\right|<\frac{1}{\sqrt{L}}\sqrt{L}\varepsilon=\varepsilon$

3. הוכח/הפרך: $\{a_n\}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=0$

הפרכה: ראינו בכיתה שהסדרה $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{n+1}$ אינה מתכנסת (כי היא לא קושי). אבל $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$

4. תהי $\{a_n\}$ סדרה המקיימת $|a_n|\le 2$ וגם $|a_{n+1}-a_n|\le\frac{1}{5}\left|a_n{}^2-a_{n-1}{}^2\right|$. הוכח שהסדרה מתכנסת.

הוכחה:

$$\frac{1}{5}\left|a_n{}^2-a_{n-1}{}^2\right|=\frac{1}{5}|a_n-a_{n-1}||a_n+a_{n-1}|\le\frac{1}{5}|a_n-a_{n-1}|\left(|a_n|+|a_{n-1}|\right)\le$$

$$\le\frac{1}{5}|a_n-a_{n-1}|(2+2)=\frac{4}{5}|a_n-a_{n-1}|$$

כפי שראינו, קל להראות שסדרה המקיימת $|a_{n+1}-a_n|\le p|a_n-a_{n-1}|$ הינה סדרת קושי ולכן מתכנסת (עבור $0<p<1$)

5. תהי הסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{a_n}$, ונתון $a_1=c>0$

a. עבור אילו ערכי c הסדרה מונוטונית עולה? יורדת?

פתרון:

רוצים לראות מתי $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ גדול מאחד או קטן מאחד. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{a_n}}{a_n}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$. לכן, אם $a_n<1$ אזי $\sqrt{a_n}<1$ ולכן $\frac{1}{\sqrt{a_n}}>1$ ולכן $a_{n+1}>a_n$. לכן הסדרה תהא מונוטונית עולה אם כל האיברים שלה יהיו קטנים מאחד. אבל קל להראות באינדוקציה שאם $c<1$ אזי כל איברי הסדרה קטנים מאחד: נניח $a_n<1$ לכן $a_{n+1}=\sqrt{a_n}<1$.

באופן דומה, ניתן להראות שעבור $c\geq 1$ הסדרה מונוטונית יורדת.

b. עבור אילו ערכי c הסדרה מתכנסת?

פתרון:

הסדרה יורדת וחסומה על ידי 1 או עולה וחסומה על ידי 1 ולכן מתכנסת תמיד

c. מה גבול הסדרה עבור ערכי c מהסעיף הקודם?

פתרון:

$\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{a_n}$. נסמן $\lim_{n\to\infty}a_n=L$ לכן לפי שאלה קודמת ביחד מקבלים $L=\sqrt{L}$ לכן $L^2-L=0$ לכן $L=0$ או $L=1$. אם $c>1$ אז כל איברי הסדרה גדולים מאחד ולכן גבול הסדרה גדול שווה 1 ובפרט אינו אפס. אם $c\leq 1$ אז הסדרה מונוטונית עולה ולכן כל איברי הסדרה גדולים שווים ל c ולכן גבול הסדרה גדול שווה ל c אבל $0<c$ ולכן גבול הסדרה שוב לא יכול להיות אפס.

תשובה: לכן גבול הסדרה הינו 1

6. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}$ ונתון $a_1>0,c>0$

a. עבור אילו ערכים של a_1 הסדרה מונוטונית עולה? יורדת? (רמז: נניח x מקיים $x=\sqrt{c+x}$, מה קורה כאשר $a_n<x$?)

פתרון:

נבדוק מתי הסדרה מונוטונית, $a_{n+1}-a_n=\sqrt{c+a_n}-a_n$. נשווה לאפס, $\sqrt{c+a_n}-a_n=0$ אם"ם $a_n{}^2=c+a_n$, פתרונות המשוואה הזו הם $\frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$. קל לראות שתמיד $a_n\geq 0$ לכן כאשר

$\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} \geq a_n \geq 0$ מתקיים $a_n{}^2 - a_n - c = 0$ כלומר $a_n{}^2 < c + a_n$ כלומר $a_n < a_{n+1}$ ולכן הסדרה עולה. כאשר $a_n > \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ הסדרה יורדת.

כעת, על מנת להראות מונוטוניות, צריך להראות שכל איבר הסדרה קטנים מ $\frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ או שכולם גדולים ממנו. נוכיח את זה באינדוקציה. נסמן $x = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ ברור ש x מקיים את המשוואה $x = \sqrt{c+x}$ (הרי מצאנו אותו כפתרון של המשוואה הזו).

נניח $a_n \leq x$ לכן $a_{n+1} = \sqrt{c+a_n} \leq \sqrt{c+x} = x$. כלומר, אם איבר אחד קטן מ x באופן אינדוקטיבי גם כל שאר איברי הסדרה אחריו קטנים מ x. (ההוכחה למקרה שהם גדולים מ x דומה).

תשובה: לכן הסדרה מונוטונית עולה אם $a_1 \leq x$ ומונוטונית יורדת אם $x \leq a_1$

b. עבור הערכים שמצאת בסעיף הקודם, האם הסדרה מתכנסת?

פתרון:

הראנו שאיברי הסדרה יורדים וחסומים מלמטה ע"י x או שהם עולים וחסומים למעלה ע"י x כך או כך הסדרה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת תמיד.

c. מה גבול הסדרה כאשר היא מתכנסת? האם יכולת לענות על סעיף זה לפני הסעיפים הקודמים?

פתרון:

אם הסדרה מתכנסת נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. לפי שאלה קודמת, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{c+a_n} = \sqrt{c+L}$ אבל $L = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{c+a_n} = \sqrt{c+L}$. לכן $L = \frac{1\pm\sqrt{1+4c}}{2}$ אבל מכיוון שאיברי הסדרה אי שליליים, לא יתכן שהגבול שלילי ולכן הגבול הינו $L = x = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}$ (וזה מאד הגיוני בהתחשב בסעיף הראשון – הסדרה עלתה לכיוון x או ירדה לכיוונו)

7. מצא את **<u>כל</u>** הפתרונות של המשוואה $x = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+x}}}$ (רמז: תתי סדרות של סדרה מתכנסת שואפים לגבול שלה)

פתרון:

נגדיר סדרה $a_{n+1} = \sqrt{5+a_n}$, וסדרה $b_{n+1} = \sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+b_n}}}$. קל לראות ש $b_2 = a_4$, $b_3 = a_7$ ובאופן כללי $b_{n+1} = a_{3n+1}$ כלומר b_n הינה תת סדרה של a_n. הוכחנו בשאלה קודמת ש a_n מתכנסת

לגבול $L=\frac{1+\sqrt{1+4\cdot 5}}{2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ לכן גם $b_n\to L$. אבל $\lim_{n\to\infty} b_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+b_n}}}$

ולכן $L=\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+L}}}$, כלומר מצאנו פתרון למשוואה.

נוכיח שהוא הפתרון היחיד. נניח וקיים פתרון אחר, $y\neq L$ כלומר $y=\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{5+y}}}$. קל

לראות שאם נגדיר $b_1=y$ אזי b_n תהא הסדרה הקבועה y ולכן $b_n\to y\neq L$ בסתירה.

8. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$ ונתון $a_1>0$. הוכח ש $\{a_n\}$ אינה חסומה. (רמז: הראה שהיא מונוטונית קודם כל).

פתרון: קל להראות באינדוקציה ש $a_n\geq 0$ לכל n. ולכן $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{a_n}\geq 0$ כלומר הסדרה מונוטונית עולה. נניח ש $\{a_n\}$ הייתה חסומה, לכן היא הייתה מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת לגבול L. כלשהוא. לכן $L=\lim a_{n+1}=\lim(a_n+\frac{1}{a_n})=L+\frac{1}{L}$ ולכן $L=L+\frac{1}{L}$ ולכן $\frac{1}{L}=0$. אבל אין מספר ממשי שמקיים את המשוואה הזו, וזו סתירה לכך שהסדרה מתכנסת, ולכן היא אינה חסומה.

9. תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right)$ ו $a_1=13$

הוכח כי הסדרה מתכנסת.

פתרון:

$$|a_m-a_n|=|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}-\ldots-a_{n+1}+a_{n+1}-a_n|\leq|a_m-a_{m-1}|+\ldots+|a_{n+1}-a_n|=$$

$$=\left|(-1)^{m-1}\left[\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\right]\right|+\ldots+\left|(-1)^n\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right]\right|=\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\leq$$

$$\leq\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{2^{m-n-1}}+\ldots+1\right]=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}\leq\frac{1}{2^n}\to 0$$

לכן זו סדרת קושי ולכן היא מתכנסת (ללא תלות באיבר הראשון כלל)