ⓔ $A=\mathbb{Z}$ $B=\mathbb{N}$ $|A|=|B|=\aleph_0$ $B\setminus A=\phi$ $A\setminus B=\mathbb{Z}^-$

אריתמטיקה של עוצמות

הגדרה יהיו A,B קבוצות אזי $A^B := \{f : B \to A\}$.

תרגיל

יהיו A,B,C קבוצות כך ש $|A| \le |B|$. הוכיחו כי $|A^C| \le |B^C|$.

נתון קיימת $f: A \to B$ חח"ע

$g: A^C \to B^C$

$h: C \to A$

$g(h) = \underbrace{f \circ h}_{C \to B}$

חח"ע ✓

$f \circ h$ בגלל f חח"ע

מצאנו g חח"ע $A^C \to B^C$ כלומר $|A^C| \le |B^C|$

תרגיל

יהיו A,B קבוצות כך ש $|B|>1$. הוכח כי $|A|<|B^A|$.

$|B|>1$ כלומר נוכל לקחת $b_1\neq b_2\in B$ ולהשתמש בהם על מנת להגדיר

$g: A\to B^A$

$a\in A: \quad g(a)=f_a \longrightarrow f_a(x)=\begin{cases} b_2 & x\neq a \\ b_1 & x=a \end{cases}$

נראה g חח"ע $g(a_1)=g(a_2)$ $\quad |A|\le|B^A|$

$f_{a_1}=f_{a_2}$ $\Leftarrow$ עבור כל $x\in A$ $f_{a_1}(x)=f_{a_2}(x)$ נניח בשלילה $a_1\neq a_2$

בפרט ל $a_1=x$ $\quad b_2=f_{a_2}(a_1)=f_{a_1}(a_1)=b_1$

בסתירה לכך ש $b_1\neq b_2$.

כדי להראות $|A|<|B^A|$, נצטרך למצוא $f\in B^A$ שאין לה מקור

$f(x\neq a)=b_1 \qquad f(a)=b_2$

אך לכל $x\in A$ $f_a=f$ כלומר אין לה מקור תחת g.

הגדרה: יהיו שתי קבוצות **זרות** A,B כך ש $|A|=a, |B|=b$. אזי נגדיר פעולות בין עוצמות:

- $a+b:=|A\cup B|$
- $a\cdot b:=|A\times B|$
- $a^b:=|\{f: B\to A\}|$

הערות:

- ההגדרות לעיל מוגדרות היטב, כלומר העוצמה נשארת זהה ללא תלות בבחירת הקבוצות המייצגות.
- בידקו שעבור המקרה הסופי מתקיים מה שמצופה.

$1\cdot 2 = |\{1,2\}\times\{3\}| = |\underbrace{\{(1,3)\,(2,3)\}}_{2}|$

למשל $2+1 = |\{1,2\}\cup\{3\}| = 3$

- **שימו לב:** מתוך הגדרה זו קל לראות את חוקי החזקות למקרי הקצה:
  - $a^0 = 1$ שכן יש פונקציה יחידה מהקבוצה הריקה לכל מקום - היחס שהוא הקבוצה הריקה.

$R=\{\}$ יחס חד ערכי ושלם = פונקציה

  - $0^0 = 1$ זה מקרה פרטי של הסעיף הקודם, ועדיין מתקיים
  - $1^a = 1$
  - $0^a = 0$ $a \neq 0 \to$ אין אף פונקציה מקבוצה לא ריקה אל קבוצה ריקה, שכן יחס כזה לא יכול להיות שלם.

תכונות האריתמטיקה

יהיו a,b,c עוצמות אזי מתקיים

- $ab = ba$
- $(ab)c = a(bc)$
- $a^b a^c = a^{b+c}$
- $a^c b^c = (ab)^c$
- $(a^b)^c = a^{bc}$

כלומר מתקיימים חוקי החזקות ה"רגילים"

$a^b a^c = a^{b+c}$

$|A|=a$ $|B|=b$ $|C|=c$ קבוצות זרות

$f: \underline{A^{B\cup C}} \to \underline{A^B \times A^C}$

$f(g: B\cup C \to A) = (\ ,\ )$ $g \mapsto (g|_B, g|_C)$

חח״ע ועל (תוכיחו לבד)

$(a^b)^c = a^{bc}$

$(A^B)^C \longrightarrow A^{B\times C}$

$f \mapsto g(b,c) = f(c)(b)$

$f: C \to A^B$

חח״ע ועל

בנוסף אם מניחים את אקסיומת הבחירה אזי מתקיים עבור a,b עוצמות כאשר אחד מהם אין סופי

- $a+b = max\{a,b\}$
- אם שניהם אינם אפס אזי $a\cdot b = max\{a,b\}$
- מסקנה: אם $2 \le a \le b$ אזי $a^b = 2^b$

הוכחה $2^b \le a^b \le (2^a)^b = 2^{ab} = 2^b$

תרגיל

הוכח כי $\aleph_0 + \aleph = \aleph$

לפי אריתמטיקה $\aleph = \aleph_0 + \aleph = \max\{\aleph_0, \aleph\}$

לפי הגדרה $|A| = \aleph$ $|B| = \aleph_0$ $|A \cup B| = \aleph$ $B = \mathbb{N}$

$A = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ $\aleph = |A| \le |\underset{\aleph}{A} \cup \underset{\aleph_0}{B}| \le |\mathbb{R}| = \aleph$

תרגיל

הוכח כי $\aleph \cdot \aleph = \aleph$

$2^{\aleph_0} = |\{0,1\}^{\mathbb{N}}|$

$|A| = |\{0, \dots 9\}^{\mathbb{N}}| = 10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

$\aleph = \{f : \mathbb{N} \to \{0, 1, \dots 9\}\} = A$

$B = |A \times A| = \aleph \cdot \aleph$

$2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$ אריתמטיקה

חח״ע ועל $f : A \to A \times A$ $f(n) \mapsto (f(2n), f(2n+1))$

$\aleph = \max\{\aleph, \aleph\} = \aleph \cdot \aleph$

תרגיל

הוכח כי $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}| = \aleph$

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ $\quad$ $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|\le\aleph$

נניח בשלילה $|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=a$ קטנה ממש מ א

$\aleph=|\mathbb{R}|=|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|+|\mathbb{Q}|=a+\aleph_0=a=(\max\{a,\aleph_0\})$

$\aleph=\max\{a,\aleph_0\}$ בסתירה

$|\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}|=\aleph$

תרגיל

תהא A קבוצה אינסופית ו $B\subseteq A$ תת קבוצה.

הוכח/הפרך

1. $|A\setminus B| = |A| \Rightarrow |B| < |A|$
2. $|A\setminus B| = |A| \Leftarrow |B| < |A|$

פתרון:

1. $|A|=\mathbb{Z}$ $\quad$ $|B|=\mathbb{N}$ $\quad$ $|A\setminus B|=|\mathbb{Z}^-|=\aleph_0=|\mathbb{Z}|=|A|$

הפרכה $|B|=|A|$

2. נשים לב שאפשר להציג $A=A\setminus B\cup B$ (איחוד זר)

$|B|<|A|$ נתון $\quad$ $|A|=|A\setminus B|+|B|=\max\{|A\setminus B|,|B|\}$

אם $|A\setminus B|<|A|$ סתירה $|A|<|A|$

$|A|=|A\setminus B|$

תרגיל

1. מה עוצמת $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$\aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$

2. מה עוצמת $X = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f(1) \le f(2)\}$

פתרון: $X \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כלומר $|X| \le \aleph$

$f \in X$ $\quad g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}$ ל- (תפיים)

$g \longmapsto \begin{cases} g(n) & n>1,2 \\ 1 & n=1,2 \end{cases}$

$h : \mathbb{N}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}} \longrightarrow X$ חח"ע

$\underbrace{|\mathbb{N}^{\mathbb{N}\setminus\{1,2\}}|}_{\aleph} \le |X| \le \aleph \longrightarrow |X| = \aleph$

3. מה עוצמת $X = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : \forall x \notin \mathbb{Q} f(x) = 1\}$

פתרון:

$X \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$|X| \le \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}$

$f \in X \longrightarrow \begin{cases} f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}} = 1 \\ f|_{\mathbb{Q}} = g \end{cases}$

$g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$

$h : \mathbb{R}^{\mathbb{Q}} \longrightarrow X$

$h(f)(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ g(x) & x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$|X| = |\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}| = \aleph^{\aleph_0} = \aleph$

תרגיל

תהי $\{A_i\}_{i\in I}$ משפחה של קבוצות הזרות זו לזו כך שעוצמת כל אחת מהן בa. נגדיר $\sum_{i\in I} a = |\bigcup_{i\in I} A_i|$. הוכח כי $\sum_{i\in I} a = |I| \cdot a$.

פתרון:

נגדיר A להיות קבוצה נוספת $|A| = a$

אם נמצא g $g : I \times A \to \bigcup_{i\in I} A_i$ חח"ע ועל הוכחנו את מה שהיה להוכיח

כיוון שנתון $|A_i| = a$ $\forall i \in I$ קיימת פונק' $f_i : A \to A_i$ חח"ע ועל $(|A_i| = |A| = a)$

$g(\underset{k\in I}{k}, \underset{x\in A}{x}) = f_k(x) \in A_k \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$

g היא על כי כל f_i היא על ולכן בהכרח $\exists i \in I\ a \in A_i \Leftarrow a \in \bigcup A_i$

וf_i על לכן קיים מקור לa.

g חח"ע: $g(i,x) = g(j,y)$ אזי $f_i(x) = f_j(y)$ אם $i = j$, f_i חח"ע וסיימנו

$i \ne j$ $A_j \ni f_j(y) = f_i(x) \in A_i$ בסתירה לכך $A_i \cap A_j = \emptyset$