מרחבי המטריצות

תהי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. מגדירים 4 מרחבים עיקריים:

- **מרחב העמודות** של A. זהו המרחב הנפרש על ידי עמודות המטריצה A. נסמן
$C(A) = span\{C_1(A), \dots, C_n(A)\} = \{Ax \mid x \in \mathbb{F}^n\} \le \mathbb{F}^m$
- **מרחב השורות** של A. זהו המרחב הנפרש על ידי שורות המטריצה A. נסמן
$R(A) = span\{R_1(A), \dots, R_m(A)\} = \{A^t x \mid x \in \mathbb{F}^m\} = C(A^t) \le \mathbb{F}^n$
- **מרחב האפס** של A. זהו מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $Ax = 0$. נסמן
$N(A) = \{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = 0\} \le \mathbb{F}^n$
- **מרחב האפס השמאלי** של A. זהו מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A^t x = 0$.
נסמן $N(A^t) = \{x \in \mathbb{F}^m \mid A^t x = 0\} = \{x \in \mathbb{F}^m \mid x^t A = 0\} \le \mathbb{F}^m$

דוגמא:

$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & t & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ אזי $\leftarrow$ $\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}$

1. $C(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
2. $R(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}$
3. $N(A) = \{\begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\} \rightarrow span\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$
4. $N(A^t) = \{0\}$

מרחב השורות

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m\times m}$ מטריצה הפיכה (למשל מכפלת מטריצות אלמנטריות שמדרגות את A).

הוכח $R(A) = R(EA)$.

הוכחה:

ב) יהי $(EA)^t x \in R(EA)$ $\leftarrow$ אזי $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$ ע"פ כפל עמודה $C_i((EA)^t x)$

$= x_i C_i((EA)^t) = x_i \cdot R_i(EA)$

$(EA)^t x = A^t E^t x = A^t \underbrace{(E^t x)}_{y} = A^t y$

כעת $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ ובאופן דומה.

$A^t y$ – צירוף לינארי של שורות A

$y_1 A_1 + y_2 A_2 \dots$

$\downarrow$

$(EA)^t \in R(A)$

(⊆) יהי: $A^t x \in R(A)$

$$A^t x = (E^{-1}EA)^t x = (EA)^t \cdot \underbrace{(E^{-1})^t x}_{y} = (EA)^t y$$

כמו קודם ← $(EA)^t y$ צ״ל של $R_i(EA)$

$A^t x \in R(EA)$

מש״ל

מסקנה: בפרט אם E מכפלה של מטריצות אלמנטריות המעבירות את A לצורה מדורגת/קנונית
אז נקבל כי מרחב השורות של A שווה למרחב השורות של הצורה המדורגת/קנונית.

תרגיל/דוגמא:

תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ מצא את $R(A)$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כיון שמרחב השורות לא מתקלקל בדירוג

$$R(A) = \operatorname{span}\{(1\ 2\ 3\ 4), (0\ 1\ 0\ 1)\} = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 2a+b \\ 3a \\ 4a+b \end{pmatrix} \middle| a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

השלמה לבסיס

ראינו שמרחב השורות לא משתנה בדירוג. לכן כדי למצוא וקטור שאינו במרחב השורות, אפשר להסתכל הצורה המדורגת ולמצוא וקטור שאינו נמצא במרחב השורות של המדורגת. כמו שראינו, אם $v \notin span\{v_1, \dots, v_n\}$ אזי $\{v_1, \dots v_n, v\}$ בת"ל. ואם נמצא קבוצה בת"ל מקס' אזי היא בסיס.

דוגמא:

השלם את $\left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$

לבסיס. ל-$\mathbb{R}^4$

כיון שמרחב השורות לא משתנה בדירוג, נשים את הוקטורים הנ"ל בשורות מטריצה ונדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 1$$

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}2\\1\\1\\3\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

קיבלנו קבוצה בת"ל

עם 4 איברים, לכן לפי שליש חינם ← בסיס ל-$\mathbb{R}^4$

מרחב העמודות

את מרחב העמודות ניתן למצוא כמו את מרחב השורות ע"י מעבר ל A^t. נראה ע"י דוגמא עוד דרך:

דוגמא: מצא את מרחב העמודות של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

פתרון: אחרי דירוג קיבלנו $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ניתן להוכיח את הטענה: מרחב העמודות נפרש ע"י העמודות במטריצה המקורית שמתאימות לעמודות ציר.

אצלנו בדוגמא שעמודות הציר הן עמודות מספר 1 ו - 2 נקבל כי מרחב העמודות הוא

$C(A) = span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$ שימו לב - $span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\} \neq span\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

שימו לב! מרחב העמודות "מתקלקל" בדירוג.

משפט: $dim[R(A)] = dim[C(A)]$

הגדרה: הדרגה של A מוגדרת להיות $rank(A) = dim[R(A)]$

אבחנה: מימדי מרחבים המטריצה והדרגה

תהי A מטריצה. המספרים הבאים שווים (זה נובע מהחומר שלמדנו עד עכשיו):

- דרגת המטריצה
- מימד מרחב העמודות
- מימד מרחב השורות
- מספר השורות השונות מאפס בצורה הקנונית
- מספר האיברים הפותחים
- מספר עמודות הציר
- מספר המשתנים התלויים

המספרים הבאים שווים:

- מספר המשתנים החופשיים
- מימד מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $N(A)$

מכיוון שמספר המשתנים החופשיים ועוד מספר המשתנים התלויים שווה לסך כל המשתנים, וזהו מספר העמודות במטריצה, נובע שדרגת המטריצה ועוד מימד מרחב הפתרונות שווים למספר העמודות.

משפט הדרגה (עבור מטריצות)

עבור $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מתקיים $rank(A) + \dim N(A) = n$

תרגיל

יהיו $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$ מטריצות

הוכח: $rank(AB) \le rank(A), rank(B)$

עבור A נוכיח $\dim[C(AB)] \le \dim[C(A)]$,

עבור B $\dim[R(AB)] \le \dim[R(B)]$ (נעשה בהרצאה)

<u>מסקנה:</u> $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ $B\in\mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה $\Leftarrow$ $rank(AB)=rank(A)$

$rank(A) = rank(ABB^{-1}) \le rank(AB) \le rank(A)$

מרחב האפס

תרגיל: תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ותהא $E \in \mathbb{F}^{m\times m}$ מטריצה הפיכה.

הוכח $N(A) = N(EA)$.

פתרון:

$\supseteq$ $x\in N(EA) \Rightarrow EAx=0$ נכפיל E^{-1} משמאל $Ax=0 \Rightarrow x\in N(A)$

$\subseteq$ $x\in N(A) \Rightarrow Ax=0$ נכפיל E משמאל $EAx=0 \Rightarrow x\in N(EA)$

מסקנה: דירוג אל מקלקל את מרחב האפס.

תרגיל: מצא את מרחב האפס של $A = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&0&1\\1&3&3&5\end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cccc} & & t & s \end{array}$$
$$\begin{pmatrix}1&0&3&2\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$x+3t+2s=0$$
$$y+s=0$$

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix}-3t-2s\\-s\\t\\s\end{pmatrix} \middle| \, t,s\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\downarrow$$

$$t\begin{pmatrix}-3\\0\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

דוגמא נוספת

מצא בסיס למרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} & & t & s \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מדרגי קנוני

$$(-t-s, t, t, s) \longrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

פתרון כללי

מרחב האפס השמאלי:

תרגיל: מצא מצא את מרחב האפס השמאלי של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

בעצם צ"ל $N(A^t)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{ccc} & & t \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$N(A^t) = \left\{ \begin{pmatrix} -t \\ -t \\ t \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\} = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

סיכום: אלגוריתם למציאת שלושת מרחבי המטריצה $C(A), R(A), N(A)$

1. דרג את המטריצה (ניתן גם לדרג קנונית אך לא חובה)
2. **השורות השונות מאפס** מהוות בסיס למרחב השורה
3. **העמודות במטריצה המקורית** המהוות עמודות ציר (כלומר יש איבר פותח בעמודה בצורה הקנונית), מהוות בסיס למרחב העמודה
4. הצב פרמטרים במקום המשתנים החופשיים ומצא את הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית ששווה למרחב האפס. (**הוקטורים הקבועים** מהווים בסיס)

שימו ♡ – ניתן להעביר לקואורדינטות

תרגיל

תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}, B \in \mathbb{F}^{n\times p}$.

הוכח שאם עמודות AB בת"ל אז גם עמודות B בת"ל

הוכחה:

נתון $\{C_i(AB)\}$ בת"ל. $\Leftarrow$ $\text{rank}(AB)=p$

$$p=\overbrace{\text{rank}(AB)\le \text{rank}(B)}^{\text{תכונה}}\le p$$

$$\Downarrow$$

$$\text{rank}(B)=p$$

תרגיל

תרגיל. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $rank(A) + rank(B) > n$. הוכח $AB \neq 0$

נניח בשלילה – $AB=0$. $\leftarrow$ $\forall i \quad C_i(AB)=0=A\underbrace{C_i(B)}_{x}=0$

$Ax=0$

$$\forall i \quad C_i(B) \in N(A) \longrightarrow C(B) \subseteq N(A)$$

$$\Downarrow$$

$$rank(B) = dim(C(B)) \leq dim(N(A))$$

$$rank(B)+rank(A) \leq dim(N(A)) + rank(A) = n$$

בסתירה לנתון ש $(\quad)>n$

תרגיל

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{m\times n}$ מטריצות. הוכיחו כי $rank(A+B) \le rank(A) + rank(B)$

$C(A+B) \subseteq C(A)+C(B)$ (בקלות אפשר להוכיח)

לפי משפט המימדים:

$$rank(A+B) \le \dim[\underbrace{C(A)+C(B)}_{\supseteq C(A+B)}] \le \underbrace{\dim(C(A))+\dim(C(B))}_{rank(A)+rank(B)}$$

תרגיל

תהא A ריבועית מסדר n כך ש $A^2 = 0$ הוכיחו כי $rank(A) \leq n/2$

מהנתון , $\forall i: A \cdot C_i(A) = 0 \longrightarrow C(A) \subseteq N(A)$

$2\dim(C(A)) \leq \dim N(A) + \dim C(A) = n$

$2\,rank(A) \leq n \longrightarrow rank(A) \leq \frac{n}{2}$

•

העתקות לינאריות

הגדרה: יהיו V, W שני מ"ו מעל *אותו* שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $T : V \to W$ היא הע"ל אם

1. $\forall v_1, v_2 \in V: \ T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V: \ T(\alpha v) = \alpha T(v)$

(או באופן שקול: אם לכל $v_1, v_2 \in V,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $(T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2)$

תכונות בסיסיות:

1. $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \underbrace{T(v_1)}_{\in W} + \alpha_2 \underbrace{T(v_2)}_{\in W} + \cdots + \alpha_n T(v_n)$
2. $T(0_V) = 0_W$

דוגמאות

1. יהיו $V = \mathbb{F}^n,\ W = \mathbb{F}^m$ שניהם מעל $\mathbb{F}$. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ אזי העתקה $L_A : V \to W$ המוגדרת $\underbrace{v}_{V} \mapsto \underbrace{Av}_{W}$ היא הע"ל.

$\alpha \in \mathbb{F},\ v_1, v_2 \in V \ : \ L_A(\alpha v_1 + v_2) = A(\alpha v_1 + v_2) = \alpha A v_1 + A v_2 = \alpha L_A(v_1) + L_A(v_2)$

2. ההעתקה $trace : \mathbb{F}^{n \times n} \to \mathbb{F}$ המוגדרת $A \mapsto tr(A)$ היא הע"ל.

$\alpha \in \mathbb{F},\ A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$

$tr(\alpha A + B) = \alpha\, tr(A) + tr(B)$

3. ההעתקה $D:\mathbb{R}_n[x]\to\mathbb{R}_{n-1}[x]$ המוגדרת $p(x)\mapsto \frac{d}{dx}p(x)=p'(x)$ היא הע"ל.

$$D[\alpha p_1(x)+p_2(x)] = (\alpha p_1(x)+p_2(x))' = \alpha p_1(x)' + p_2(x)' = \alpha D[p_1(x)] + D[p_2(x)]$$

4. העתקת הזהות $I:V\to V$ המוגדרת $v\mapsto v$ היא הע"ל.
5. העתקת האפס $0:V\to W$ המוגדרת $v\mapsto 0$ היא הע"ל.
6. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ מימד n ויהי B בסיס אזי הפונקציה $T:V\to\mathbb{F}^n$ המוגדרת $v\mapsto[v]_B$ היא הע"ל.

דוגמאות נגדיות

1. יהיו $V=\mathbb{R}^2=W$. אזי העתקה $f:V\to W$ המוגדרת $v\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}a^2\\b\end{pmatrix}$ אינה הע"ל.

$\begin{pmatrix}1\cdot 2\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ (הוצאת סקלר)

$\begin{pmatrix}1\cdot 2\\0\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}$ (לא הוצאנו)