הרצאה 13

<u>תזכורת</u> חוג R נקרא נותרי משמאל אם כל שרשרת עולה של אידאלים שמאליים

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

מתייצבת: קיים N כך ש- $I_N = I_{N+1} = I_{N+2}$,

או במילים אחרות $I_N = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

הוכחנו בפעם שעברה: R נותרי משמאל $\iff$ כל אידאל שמאלי נוצר סופית: $I = Ra_1 + \dots + Ra_m$

$= \{r_1a_1 + \dots + r_ma_m : r_1,\dots,r_m \in R\}$.

<u>תזכורת</u> נותרי: נותרי מימין וגם נותרי משמאל.

<u>משפט</u> (משפט הבסיס של הילברט) יהי R נותרי משמאל/מימין. אזי $R[x]$ נותרי משמאל/מימין.

<u>הוכחה</u> יהי $I \trianglelefteq_\ell R[x]$ אידאל שמאלי. רוצים להוכיח כי I נוצר סופית. נגדיר, לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ את הקבוצה.

$$J_n = \left\{ a_n \in R \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{קיימים } a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in R \text{ כך ש-} \\ a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in I \end{array} \right\} \subseteq R$$

בפרט, $0 \in I \Rightarrow 0 \in J_n$ לכל n. הוכחנו בפעם שעברה כי $J_n \trianglelefteq_\ell R$ אידאל שמאלי.

בנוסף, $J_n \subseteq J_{n+1}$ כי $a_n \in J_n \Leftarrow a_n x^n + \dots + a_0 \in I$

$\Leftarrow a_n x^{n+1} + \dots + a_0 x \in I$

$a_n \in J_{n+1}$.

הנחנו כי R נותרי משמאל, לכן קיים N כך ש- $\bigcup_{n=0}^{\infty} J_n = J_N$. R נותרי, לכן כל J_n נוצר סופית.

לכל $0 \le i \le N$ נבחר קבוצה סופית של יוצרים $(a_{i1}, \dots, a_{im_i})$ של J_i.

לכל יוצר a_{ij} של J_i, נבחר פולינום $f_{ij} \in I$ ממעלה i. קיבלנו תת-קבוצה סופית של I:

$$\{ f_{ij} : 0 \le i \le N, \quad 1 \le j \le m_i \} \subseteq I.$$

יהי $I' \triangleleft_\ell R[x]$ האידיאל הנוצר על ידי הקבוצה הנ"ל

$$I' = \left\{ \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=1}^{m_i} g_{ij} f_{ij} \ : \ g_{ij} \in R[x] \right\} \triangleleft_\ell R$$

אנו טוענים כי $I' = I$ ובפרט, I נוצר סופית.
ברור כי $I' \subseteq I$ כי כל $f_{ij} \in I$. צריך להוכיח $I \subseteq I'$.

אז יהי $h(x)\in I$. צריך להוכיח $h(x)\in I'$.

נעשה את זה על ידי אינדוקציה במעלה $m=\deg h$.

<u>$m=0$</u> אזי $h(x)=b_0$ פולינום קבוע. אזי $b_0\in J_0$

$b_0\in R$

(כי b_0 מקדם מוביל של פולינום ממעלה 0 מתוך I)

לכן $b_0=r_{01}a_{01}+\dots+r_{0m_0}a_{0m_0}$ עבור $r_{0j}\in R$.

ובפרט $h(x)=b_0\in I'$, כי $f_{0j}(x)=a_{0j}$

$$h(x)=r_{01}f_{01}+\dots+r_{0m_0}f_{0m_0}\in I'.$$

$$r_{0j}\in R\subseteq R[x].$$

<u>אינדוקציה</u> נניח שלכל $d\le m-1$ ידוע שאם $h\in I$, $\deg h=d$,

אזי $h\in I'$. אז יהי $h\in I$, $\deg h=m$.

$$h(x)=b_mx^m+\dots+b_0.$$

אזי $b_m\in J_m$ לפי הגדרה של J_m. נבחר פולינום

$e(x)\in I$ ממעלה m ועם מקדם מוביל b_m.

1) אם $m\le N$, אזי $b_m\in J_m$

$$b_m=r_{m1}a_{m1}+\dots+r_{mm_m}a_{mm_m},\quad r_{mj}\in R$$

נגדיר $e(x) = r_{m1} f_{m1} + \dots + r_{mm_m} f_{mm_m} \in I'$

זה פולינום ממעלה m. המקדם המוביל הינו $\sum r_{mj} a_{mj} = b_m$.

2) אם $\deg h = m \geq N$, אז $J_m = J_N$.

$$b_m = r_{N1} a_{N1} + \dots + r_{Nm_N} a_{Nm_N} \in J_N = J_m$$

פולינום ממעלה N ומקדם מוביל b_m

$$r_{N1} f_{N1} + \dots + r_{Nm_N} f_{Nm_N} \in I'$$

$$e(x) = (r_{N1} x^{m-N}) f_{N1} + \dots + (r_{Nm_N} x^{m-N}) f_{Nm_N} \in I'$$

פולינום ממעלה m ומקדם מוביל b_m.

נשים לב כי $\deg(h(x) - e(x)) < m$.

עכשיו, $h(x) \in I$, $e(x) \in I' \subseteq I$. לכן $h(x) - e(x) \in I$.

באינדוקציה אנחנו יודעים כי $h(x) - e(x) \in I'$.

לכן $h(x) = \underbrace{(h(x) - e(x))}_{\in I'} + \underbrace{e(x)}_{\in I'} \in I'$ וסיימנו!

מודולים "אלגברה לינארית מעל חוגים"

הגדרה יהי R חוג, לאו דווקא חילופי. מודול (שמאלי) מעל R (או R-מודול) הינו חבורה אבלית M (רושמים את הפעולה $+$) עם כפל סקלרי

$$R\times M \longrightarrow M$$
$$(r,m)\longmapsto rm$$

שמקיימת:

1) $(r+s)m = rm+sm$ לכל $r,s\in R$, $m\in M$

2) $r(m+n) = rm+rn$ לכל $r\in R$, $m,n\in M$

3) $r(sm) = (rs)m$ לכל $r,s\in R$, $m\in M$.

4) $1_R\cdot m = m$ לכל $m\in M$.

הערה אם $R=F$ שדה, אזי F-מודול $=$ מרחב וקטורי מעל F.

טענה לכל $m\in M$ $\quad 0_R\cdot m = 0_M$
ולכל $r\in R$ $\quad r\cdot 0_M = 0_M$

הוכחה לכל $r\in R$, $m\in M$ $\quad (r+0_R)m = rm+0_Rm = rm$

נחסר rm משני האגפים

$$0_Rm = rm-rm = 0_M.$$

כמו כן

$$rm = r(m+0_M) = rm + r0_M$$

$$0_M = r0_M.$$

<u>טענה</u> לכל $m\in M$,

$$(-1_R)m = -m$$

<u>הוכחה</u>

$$0_M = 0_R\cdot m = (1_R+(-1_R))m = 1_R m + (-1_R)m = m + (-1_R)m.$$

לכן $(-1_R)m = -m$.

<u>דוגמאות</u> 0) $R=F$ שדה, M מרחב וקטורי מעל R.

1) $M=\{0_M\}$, R חוג כלשהו $r\cdot 0_M = 0_M$

"המודול הטריויאלי".

2) R חוג כלשהו, $M=(R,+)$

$r,m\in R=M$ $\quad rm = \underset{\text{כפל של } R}{r\cdot m}$.

לכן R הוא מודול מעל עצמו (הכפל של R קיבוצי, $1_R m = m$ לכל $m\in R$, פילוגי)

3) R חוג, M אידיאל שמאלי rm כפל מתוך החוג.

הגדרה יהי M R-מודול. תת-מודול של M הינו תת-חבורה $N \subseteq M$ שהינה סגורה לכפל סקלרי:

$rn \in N$ לכל $r \in R$, $n \in N$. (N הינו גם R-מודול).

הערה נסתכל על R כמודול מעל עצמו. אזי תת-מודול של R = אידיאל שמאלי של R.

הערה אפשר להגדיר מודולים ימניים:

$$mr$$
$$(m+n)r = mr+nr$$
$$m(r+s) = mr+ms$$
$$(mr)s = m(rs)$$
$$m1_R = m$$

אם R חילופי, אזי מודול שמאלי וימני זה אותו דבר

$$rm = mr$$

נחזור לדוגמאות של מודולים

4) תהי M חבורה אבלית כלשהי. יש דרך יחידה להגדיר מבנה של $\mathbb{Z}$-מודול.

$$1 \cdot m = m$$
$$2 \cdot m = (1+1) = m+m$$
$$\vdots$$
$n \in \mathbb{Z}$ $\quad n \cdot m = m+m+\dots+m$ (n פעמים)

$(-1)m = -m$

$\vdots$

$(-n)m = -m - m - \cdots - m$

חבורה אבלית $=$ $\mathbb{Z}$-מודול.

5) $R = M_n(S)$ חוג של מטריצות מעל S)

$M = S^n$

$$r = \begin{pmatrix} s_{11} & \cdots & s_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \qquad m = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

$$rm = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \end{pmatrix}$$

יהי F שדה. F-מודול $=$ מרחב וקטורי.

6) מה זה $F[x]$-מודול?

יהי M $F[x]$-מודול.

אם נצמצם את הכפל הסקלרי ל-F, מקבלים F-מודול, כלומר מרחב וקטורי. אז נרשום $M=V$.

אבל יש מבנה נוסף, כלומר כפל סקלרי ב-x.

לכל $v \in V = M$

$$V \longrightarrow V$$
$$v \longmapsto \underset{\underset{F[x]}{\in}}{x} \cdot v$$

זו העתקה F-לינארית, כלומר אנדומורפיזם של V.
זה קובע את הכפל הסקלרי בכל פולינום.

$$x^2 \cdot v = x(xv)$$
$$x^n \cdot v = x(x \cdots (xv))$$

מצד שני, יהי V מרחב וקטורי כלשהו מעל F.
יהי $\varphi: V \to V$ אופרטור לינארי כלשהו.
ניתן להגדיר על V מבנה של $F[x]$-מודול.

$$(a_n x^n + \ldots + a_0)v = a_0 v + a_1 \varphi(v) + a_2 \varphi(\varphi(v)) + \ldots + a_n \varphi^n(v)$$

<u>מסקנה</u>: $F[x]$-מודול $=$ מרחב וקטורי V מעל F
$+$
אופרטור $\varphi: V \to V$

כי לצורך אין לעשות כפל סקלרי בפולינום, צריך לדעת רק
1) כפל סקלרי בקבועים.
2) כפל סקלרי ב-x.