תרגיל בית 2 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. נסתכל על החוג $R = M_3(\mathbb{C})$, ובתוכו על ארבע תת-הקבוצות הבאות:

$$\left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}\right\}, \quad \left\{\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\}.$$

לכל אחת מתת-הקבוצות, קבעו והוכיחו:

- האם היא תת-חוג?
- האם היא תת-חוג בלי יחידה? אם כן, האם יש בה יחידה?
- הראו שאף אחת מתת-הקבוצות האלו אינן אידאל של R מבלי להיעזר בשאלה 8.

(תזכורת: בכל מקום שמופיעה כוכבית אמור להופיע איבר של שדה הבסיס $\mathbb{C}$, והכוכביות לא בהכרח שוות זו לזו. למשל, $\left\{\begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{C}\right\}$.)

שאלה 2. יהי R חוג, ותהי $S \subseteq R$ תת-קבוצה. הוכיחו כי $C_R(C_R(C_R(S))) = C_R(S)$.
(הדרכה: הראו כי אם $S \subseteq S'$, אז $C_R(S) \supseteq C_R(S')$.)

שאלה 3 (רענון הגדרות)**.** יהיו R ו-S חוגים, ויהי $\varphi : R \to S$ הומומורפיזם. הוכיחו את הטענות הבאות:

1. $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.
2. אם x הפיך ב-R, אז $\varphi(x)$ הפיך ב-S.
3. אם x נילפוטנטי ב-R (כלומר, קיים $n > 0$ כך ש-$x^n = 0$), אז $\varphi(x)$ נילפוטנטי ב-S.
4. אם φ אפימורפיזם, אז $\varphi(Z(R)) \subseteq Z(S)$.

שאלה 4. נסמן $R = M_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

1. מצאו את ההומומורפיזם היחיד של חוגים $\varphi : \mathbb{Z} \to R$.
2. מצאו את כל ההומומורפיזמים של חוגים $\psi : \mathbb{Z}\left[\sqrt[3]{2}\right] \to R$ (הדרכה: הסבירו מדוע כל הומומורפיזם כזה נקבע על ידי התמונה של $\sqrt[3]{2}$).
3. ענו במהירות: האם בין ההומומורפיזמים מהסעיף הקודם יש אפימורפיזם?

שאלה 5. יהי p מספר ראשוני.

א. יהי R חוג בלי יחידה מסדר p. הוכיחו כי או ש-$R \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ עם חיבור וכפל מודולו p (של הנציגים), או $R \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +, \odot)$ עם חיבור מודולו p וכפל האפס שבו תמיד $x \odot y = 0$.

ב. תנו דוגמאות לחוגים עם יחידה מסדר p^2 שאינם איזומורפיים.
רשות: יש ארבעה כאלו, עד כדי איזומורפיזם. נסו למצוא את כולם.

ג. העשרה: קראו את המאמר "מיון חוגים סופיים מסדר p^2" מאת בנג'מין פיין וענו כמה חוגים בלי יחידה יש מסדר p^2q עבור $q \neq p$ ראשוני.

שאלה 6. הוכיחו שתת־הקבוצות הבאות הן אידאלים.

א. עבור חוג R, $\left\{\begin{pmatrix}0 & a_1 & a_2\\ 0 & 0 & a_3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \mid a_i \in R\right\} \lhd \left\{\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 0 & a_4 & a_5\\ 0 & 0 & a_6\end{pmatrix} \mid a_i \in R\right\}$.

ב. יהי R חוג. הוכיחו $I = \{f \in R[x] \mid f(212) = 0\} \lhd R[x]$. מה יקרה אם נדרוש $f(212) = 1$ במקום?

ג. נסמן

$$I = \left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ b & 0\end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}\right\}, \qquad J = \left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{Q}\right\}$$

הוכיחו ש-$I \leq_l M_2(\mathbb{Q})$ אידאל שמאלי ו-$J \leq_r M_2(\mathbb{Q})$ אידאל ימני. הוכיחו כי $I \cap J$ אינו אידאל.

שאלה 7. הפריכו את הטענות השגויות הבאות:

א. איחוד אידאלים הוא אידאל.

ב. יהיו $S \subseteq R$ חוגים, ויהי $I \lhd S$. אז $I \lhd R$.

ג. יהי R חוג. אז תת־החוג הבא הוא אידאל של $R \times R$:

$$\Delta = \{(r, r) \mid r \in R\} \subseteq R \times R$$

שאלה 8. יהי R חוג. בשאלה זו נחקור את המרכז ואת האידאלים של חוג המטריצות מעל R.

א. הראו כי $Z(M_n(R)) = Z(R) I_n$. כלומר, המרכז של $M_n(R)$ מכיל רק מטריצות סקלריות, שהאיבר באלכסון שלהן הוא מהמרכז של R.

ב. הראו כי אם $I \lhd R$, אז $M_n(I) \lhd M_n(R)$.

ג. הראו כי כל אידאל של $M_n(R)$ הוא מהצורה הנ"ל. כלומר, הראו שאם $J \lhd M_n(R)$, אז קיים $I \lhd R$ שעבורו $J = M_n(I)$.

(הדרכה לסעיפים א' ו-ג': היעזרו במטריצות e_{ij} שבהן יש 1 במקום ה-(i, j) ו-0 בכל מקום אחר.)

שאלה 9.

א. הראו כי אם $R_1,\dots,R_n$ חוגים ו-$I_j \lhd R_j$ אידאלים, אז $\prod_{j=1}^n I_j \lhd \prod_{j=1}^n R_j$.

ב. הראו כי אם $R_1,\dots,R_n$ חוגים, אז כל אידאל של $\prod_{j=1}^n R_j$ הוא מהצורה $\prod_{j=1}^n I_j$ לאידאלים $I_j \lhd R_j$.

ג. הראו כי טענת הסעיף הקודם אינה נכונה אם מדובר על מכפלה אינסופית.

שאלה 10. תהי X קבוצה. הזכרו ש-$(P(X),\triangle,\cap)$ הוא חוג חילופי. תהי $\varnothing \neq \tau \subseteq P(X)$ תת־קבוצה לא ריקה.

א. נאמר ש-τ סגורה לאיחוד אם $A,B \in \tau$ גורר $A \cup B \in \tau$. נאמר ש-τ סגורה להכלה אם $A \subseteq B \in \tau$ גורר $A \in \tau$. הוכיחו כי τ אידאל אם ורק אם τ סגורה לאיחוד והכלה.

ב. נניח ש-X סופית. הוכיחו ש-τ אידאל אם רק אם קיים $C \subseteq X$ כך ש-$\tau = P(C)$.

ג. מצאו אידאל τ של $(P(\mathbb{N}),\triangle,\cap)$ שאינו מן הצורה $P(C)$.

בהצלחה!